

III

Die

Ziffernrechnung,

oder

vollständiges Lehrbuch

der

Rechenkunst.

Zum Gebrauche für Schulen und im bürgerlichen Leben.

Von

Johann Schön,

der Philosophie Doktor, öffentlichem und ordentlichem Professor der Mathematik an der königlichen Universität zu Würzburg.

Zweyte durchaus umgearbeitete, verbesserte und vermehrte Ausgabe.

Bamberg und Würzburg,
in den Goebhardt'schen Buchhandlungen.
1815.

Vorrede
zur
ersten Auflage.

Zur Herausgabe vorliegender Schrift wurde ihr Verfasser durch seine Wiederanstellung bey dem hiesigen neuorganisirten Gymnasium veranlaßt. Dem neuen Schulplane gemäß soll nicht nur in allen 5 Gymnasiumsklassen, sondern auch in den 2 untersten Realklassen, Mathematik, in ihrer natürlichen stufenweisen Steigerung vorgetragen werden. Diese durchgreifende Anordnung ist eine jener glänzenden Huldigungen, welche den mathematischen Wissenschaften in Ansehung ihres großen Nutzens und wichtigen Einflusses auf Geist und Herz ihrer Verehrer von den ausgebildetesten Männern aller kultivirten Nationen von jeher gezollt wurden.

Um der Absicht der Regierung nach Pflicht und Kraft zu entsprechen, machte sich es der Verfasser gleich beym Anfange des Schuljahres zum angelegensten Geschäfte, gegenwärtiges Lehrbuch auszuarbeiten, weil er kein anderes fand, das er, um seine Vorträge ganz dem Studienplane gemäß einzurichten, hätte brauchen können. Nach diesem Plane soll (nebst andern Elemen-

tarkenntnissen aus der Geometrie und Mechanik) vorzüglich die Ziffernrechnung bis zur zusammengesetzten goldenen Regel (incl.) in den 2 Realklassen und in den 5 untersten Gymnasiumsklassen vollständig gelehrt, die studierende Jugend im Kopfrechnen geübt, und in Kenntniß der verschiedenen Maße, Gewichte und Geldsorten gesetzt werden. Erst in der vierten Klasse beginnt der Vortrag über Algebra. Ferner ist bey allen Vorträgen das zeitraubende Diktiren in die Feder untersagt. Endlich soll jeder Vortrag in niederen Klassen als Vorbereitung zu den Vorträgen in höheren Klassen betrachtet werden können.

Diesen Momenten zu Folge setzte der Verfasser vor Ausarbeitung dieses Buches, als nothwendige Requisiten seiner Brauchbarkeit, folgende Punkte fest: 1. es muß die Rechenkunst so vollständig enthalten, daß sich ein jeder, welcher im bürgerlichen Leben davon Gebrauch machen will oder muß, mittels dieses Buches gehörig orientiren kann. Daher hat der Verfasser auch die Lehre von den Dezimalbrüchen, vom Quadrate und Würfel, und der Wurzelausziehung aus beyden, von den Rechnungsarten in benannten Zahlen, und dann die nothwendigsten Kenntnisse von den europäischen Maßen jeder Art, den Gewichten, den fingirten und geprägten Münzen, mit besonderer Hervorhebung dessen, was zunächst auf unser Vaterland Bezug hat, in diesem Lehrbuche ausführlich dargestellt; überall hat er auf die besonders anzustellenden Rechnungen, und die Mittel, sie zu erleichtern, Rücksicht genommen, und die einfache sowohl, als zusammengesetzte, goldene Regel vollständig abgehandelt.

2. Die Form betreffend, muß ein solches Lehrbuch a) mit der möglichsten Deutlichkeit für blose Anfänger geschrieben seyn; b) das Mittel zwischen Weitläufigkeit und Kürze halten, um das Diktiren in die Feder zu vermeiden, und doch dem mündlichen Vortrage noch etwas übrig zu lassen; c) jede unrichtige Vorstellungsart muß in ihm sorgfältig vermieden, und ihr da, wo sie sich bey dem Anfänger festsetzen könnte, durch ausdrückliche Bemerkungen vorgebeugt werden; d) ein solches Lehrbuch, das schon für erwachsene Jünglinge und nicht für Kinder, für Jünglinge, die sich größtentheils dem gelehrten Stande widmen, und am Studium der Ziffernrechnung zugleich eine Vorbereitung zum Studium der Buchstabenrechnung haben sollen, zunächst bestimmt ist, muß mit Gründlichkeit abgefaßt seyn. Denn von dieser allein hängt die Erhaltung jenes Vortheiles und der wichtige Einfluß des mathematischen Studiums auf die Kultur des Denkvermögens ab; e) die Beweise dürfen nicht ohne Noth vervielfältigt, und müssen aus der Natur der Sache selbst genommen werden, damit sie über diese Licht verbreiten helfen.

Allein nicht blos im engern Kreise, als Vorlesbuch, sondern auch im Kreise der nicht studierenden vaterländischen Jugend sollte dieses Buch, als sogenanntes Rechenbuch, wenn auch nur mittelbar, nach der Absicht seines Verfassers Nutzen stiften. Schon öfters hörte er die Klagen über den Mangel eines guten und völlig brauchbaren Rechenbuches. Die Kandidaten im ehemaligen hiesigen Schullehrer-Seminarium schrieben sich nach Diktaten eigene Hefte über die

Ziffernrechnung zusammen. Diese konnten daher nicht anders, als äusserst mangelhaft ausfallen. Vielleicht liegt eben darin ein Grund, warum das Rechnen in den meisten Bürgerschulen noch immer nicht mit dem erwünschten Erfolge getrieben wird, ungeachtet der Unterricht im Rechnen schon längst als ein vorzüglicher und nothwendiger Lehrgegenstand in den fränkischen Volksschulen betrachtet wurde.

Der Verfasser wollte daher **erstens** auch denen, welche sich dem Schulfache widmen, durch gegenwärtige Schrift Gelegenheit verschaffen, sich selbst vorerst gründlich im Rechnen zu unterrichten, und sich dadurch in den Stand zu setzen, auf die leichteste und faßlichste Art auch die ihrer Leitung anvertraute Jugend zu unterrichten, und diesen Unterricht in den Sonntagsschulen gesteigert fortzusetzen. In den letztern sollte vorzüglich die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel, die Anwendung der goldnen Regel gelehrt und geübt, und die nach dem Verkehr jedes Ortes mit andern umliegenden Orten wissenswürdigste Kenntniß von den gängigen Maßen, Gewichten und Geldsorten mitgetheilt werden. Ein kurzer aus vorliegender Schrift für die Volksjugend gemachter Auszug müßte dann blos dem Gedächtnisse der Lehrlinge zu Hülfe kommen, und ihnen stets das Buch bleiben, in welchem sie sich bey praktischen Rechnungen sicheren Rathes erholen könnten. *)

*) Zur Zeit, wo ich dieses schrieb, dachte ich nicht daran, daß ich selbst ein eigenes Rechenbüchlein ganz dem ausgesprochenen Sinne gemäß ausarbeiten und herausgeben würde.

lernte auf diese Art der künftige Oekonom die Ziffernrechnung mit Sicherheit und Leichtigkeit gebrauchen: so könnte er, um nur einige Beyspiele anzuführen, ohne fremde und künstliche Hülfe sein ihm zustehendes Wiesen- oder Ackerfeld, über dessen Flächeninhalt er nicht selten völlig ungewiß ist, wenigstens im Ueberschlage selbst ausmessen. Er dürfte nur 5 Schritte auf eine Ruthe Längemaß rechnen; Länge und Breite überschreiten; die beyden Zahlen der Schritte miteinander multipliziren: so hätte er, was er suchte. Dividirte er ferner dieses Produkt durch 25 (indem 25 Schritte eine Quadratruthe machen), und den neuen Quotienten weiter durch 160, der Anzahl der Quadratruthen, die bey uns auf 1 Morgen Felds gehen: so wüßte er, wieviel Morgen seine Aecker oder Wiesen hielten. Eine noch weit richtigere Kenntniß seines Feldes ohne kunstverständige Hülfe könnte sich der Oekonom erwerben, wenn er in der Schule wenigstens die Quadratwurzelausziehung gelernt, und man ihm nur zur Kenntniß der Formel; „$\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-e)(a+c-b)(b+c-a)]}$“ wodurch, wenn a, b, c die Seiten des geradelinigen Dreyeckes bezeichnen, dessen Flächenraum ausgedrückt wird *), verholfen hätte. Er dürfte demnach nur mit einer Schnur, oder nach voriger Art mit Schritten, alle Seiten und nöthigen Diagonalen seines Feldes ausmessen,

---

*) S. 163. des vom Verfasser im vorigen Jahre herausgegebenen Lehrbuches der ebenen und sphärischen Trigonometrie.

dann die Reihe der nach obiger Formel berechneten Dreyecke addiren, um die Größe seines Feldes richtig zu wissen. Verstünde er auch noch, ein jedes ausgemessene Dreyeck nach einem verjüngten Maßstabe aufzutragen: so hätte er zugleich einen Grundriß seines Feldes. Dieß die Feldmeßkunst für den Oekonomen in einer Nuß! Eben so sind dem Landmanne z. B. die Kenntnisse, wieviel Klafter Holz, wieviel Quadratstollen oder Latten aus einem Stamme können erhalten werden, nach welchem Maße irgend ein Behälter angegeben werden müsse, wenn er z. B. eine bestimmte Eimeranzahl halten soll, u. dergl. öfters sehr nützlich. Würde daher jener für die Volksjugend bearbeitete kurze Auszug nicht nur stets durch Beyspiele, aus dem Kreise des Landmannes genommen, erläutert, sondern würden auch die Auflösungen von derley nützlichen Aufgaben beygefügt: so würden wenigstens die fähigeren Kinder des Oekonomen das Rechnen nicht nur mit Vergnügen, sondern auch zu ihrem größten künftigen Vortheile erlernen.

Hieraus ist aber zugleich klar, daß der, welcher es übernimmt, die Jugend zweckmäßig im Rechnen zu unterrichten, selbst gründlich darin unterrichtet seyn müsse, um die allgemeinen Grundsätze überall mit Leichtigkeit auf besondere Fälle anwenden zu können. Der Verfasser glaubt daher, daß er durch das vorliegende Rechenbuch denen, welche sich der Erziehung der Volksjugend widmen, einen wahren Dienst geleistet habe.

Zweytens hatte der Verfasser bey Ausarbeitung dieses Buches die Absicht, dadurch auch denjenigen

nützlich zu werden, welche sich zum Studium der Forstwissenschaft gehörig vorbereiten wollen. Diesen ist eine gründliche Kenntniß von der Erhebung zum Quadrate und Würfel, wie der Wurzelausziehung aus beyden, von den Dezimalbrüchen, vom Längen- Flächen- und Körpermaße, von dem in dieser Rücksicht nöthigen eigenthümlichen Calcul und von der Proportionslehre äusserst nothwendig. Wer das gegenwärtige Lehrbuch auch nur durchzublättern sich die Mühe nehmen will, wird bemerken, daß sich der Verfasser bestrebt hat, den für den Forstmann nöthigsten Calcul überall hervorzuheben, und ihm die vertraute Bekanntschaft mit demselben möglichst zu erleichtern.

Der Verfasser mußte diese beyden Zwecke, welche er ausser seinem Hauptzwecke, mit dem jene ganz vereinbar sind, (indem das Gymnasium nach seiner neuesten Organisation nicht bloße Bildungsanstalt künftiger Gelehrten seyn soll), durch die Herausgabe dieses Buches zu erreichen suchte, noch eigends anführen. Sie dienen zu seiner Rechtfertigung, wenn er ausführlicher war, als er es in einem bloßen Lehrbuche hätte seyn sollen.

In Ansehung der der Rechnung in benannten Zahlen beygefügten Tabellen bemerkt der Verfasser, daß er sich bemühte, sich überall des Zuverläßigsten zu versichern. Vorzüglich benutzte er zu dieser Absicht die Hefte der von Hrn. von Zach herausg. monatl. Corresp. Mon. May S. 460 und Jun. S. 610 vom J. 1800; Mon. April S. 313 und May S. 565 vom J. 1804; Gren's Handb. der Chemie S. 122; die Tabellen im 9ten Bde. des Journals der Pharmacie von Tromms-

dorff; die im 2ten Bde. der logar. trigon. Tafeln von Vega S. 3+5 enthaltenen Tabellen; Huberti's Einleitung zu seinen bekannten Vergleichungstafeln; die praktische Geometrie von Mayer 1r Bd. S. 60 und 3r Bd. S. 143 (neueste Aufl.); Krusen's bekannten H. Komtoristen; den 1. prakt Th. des vollst. Handb. der Geldkunde von Buse; Nelkenbrecher's Taschenb. eines Banq und Kaufm.; nouv. Traité geom. de l'Arpentage par Lefevre. Tom. I. S. 1. — Gänzliche Vollständigkeit bey diesen Tafeln hatte der Verfass. nicht zur Absicht. Auch ist sie nicht nöthig, indem man die nöthigen Verhältnißzahlen, wie die bey jeder Reduktion, der man gerade bedarf, nöthige Verfahrungsart, in dieser Schrift genau kennen lernt, um für einen einzelnen Fall die Rechnung selbst anzustellen.

Für diejenigen, welche in dem Satze $\frac{1}{0} = \infty$, od. allgemein $\frac{a}{0} = \infty$ Seite 47 (welcher Satz wegen seiner Beziehung auf §. 15. beygefügt wurde) Widerspruch sehen, will der Verfasser nur noch die eigenen Worte des Hrn. Professors Schulz (siehe dessen Entwickelung einiger der wichtigsten mathematischen Theorien S. 209) anführen: „ich habe diese Bemerkung blos beygefügt, um bey Anfängern vorzubeugen, daß, wenn aus den Sätzen $\frac{a}{\infty} = 0$ und $\frac{a}{0} = \infty$ Widersprüche zu folgen scheinen, sie dieselben nicht voreilig für wirkliche

Widersprüche halten, sondern fest überzeugt seyn können, daß diese Widersprüche verschwinden, sobald . . ." Was soll man von denen urtheilen, welche diese Sätze nicht blos eines Widerspruches, wie der Anfänger, sondern eines entschiedenen Unsinnes bezüchtigen?

Möge denn dieses Buch auch ausser dem Wirkungskreise des Verfassers recht viel Nutzen bringen!

Würzburg den 30ten May 1805.

Der Verfasser.

Vorrede
zur
zweyten Auflage.

Da die Vorrede zur ersten Auflage über den Beweggrund zur Herausgabe, so wie über den Zweck und die Einrichtung dieses Buches hinlängliche Auskunft giebt: so habe ich nur noch einige Worte in Betreff der Verbesserungen und Vermehrungen zu sagen, welche das Buch bey seiner zweyten Ausgabe erhielt.

Dieser Schrift, welche nicht zur Klasse der gewöhnlichen Rechenbücher gehört, denjenigen Grad von Vollendung zu geben, welchen sie ihrem Zwecke nach haben soll, war ich dem gelehrten Publikum, von dem sie mit großem Beyfalle aufgenommen wurde, — den Lehrern an Gymnasien und anderen Bildungsanstalten, welche dieselbe zum Leitfaden bey ihrem gründlichen Unterrichte im Rechnen wählten, oder wählen wollen, — und meiner eigenen Ehre schuldig, indem ich voraussetzen mußte, man werde von mir die gerechte Erwartung hegen, daß ich die Gelegenheit einer neu zu veranstaltenden Auflage zur möglichsten Verbesserung des Buches benützen würde. Ob meine Bemühungen dieser Erwartung entsprochen haben, oder nicht, überlasse ich dem Urtheile gelehrter Richter, deren gegründete Bemerkungen jeder Art ich mit Vergnügen aufnehmen werde.

Die Verbesserungen betreffend, füge ich denjenigen Stellen, wo man größere Deutlichkeit verlangen konnte, Beyspiele oder sonstige Erläuterungen bey. Mehrere Beweise, namentlich die über die Methode der Wurzelaus-

ziehung kürzte ich aus demselben Grunde ab. Die Lehre von den vulgären Brüchen wurde beynahe ganz umgearbeitet, und das Nöthigste über das Numeriren zehntheiliger Brüche sogleich mit der Numeration ganzer Zahlen verbunden. Der Theil vom Rechnen mit benannten Zahlen erhielt ähnliche Verbesserungen, so wie ich denn auch bemüht war, in den Beylagen zu diesem Rechnen die gewissesten oder wahrscheinlichsten Reduktions- und Verhältnißzahlen anzuführen, und überall deutlich die Art zu lehren, wie man sich dieser Zahlen im Calcul richtig und schnell bedienen könne. Zur Umarbeitung dieser Beylagen und Tabellen benützte ich nebst den schon in der Vorrede zur ersten Auflage genannten Schriften noch besonders folgende: 1) die Schrift: Bestimmung der Maße und Gewichte des Fürstenth. Regensburg von Plac. Heinrich (Regenb. 1808); — 2) die zweyte Auflage der Schrift: Zuverläßige Vergleichung der Maße und Gewichte der Handelsst. Frankf. a. M. v. Chelius (Frankf. 1809); — 3) mehrere Angaben in den Lehrbüchern der Hrn. Prof. Magold und Weigl; — 4) die zehnte Aufl. (1810) v. Nelkenbrechers Taschenb.; — 5) das Buch; Ueber allgem. Maß u. Gew. rc. von M. F. Wild, großh. bad. Hofrathe (2 Bde, Freyb. 1809); — 6) von Mayers prakt. Geom. den 4. Th. von S. 115 — 123, und den 5. Th. von S. 52 — 62. — Ferner war ich bey dieser Ausgabe auf möglichste Befreiung des Buches von Druckfehlern bedacht. Wegen der Eile, mit welcher die erste Aufl. gedruckt werden mußte, war ich nicht im Stande, alle Druckfehler zu tilgen.

Für die Regel, diejenigen Aufgaben über die zusammengesetzte goldene Regel aufzulösen, in welche die Begriffe von Kraft und Wirkung eingehen, behielt ich noch mit mehreren Mathematikern den Namen „Reesische Regel" bey, ungeachtet K. F. de Rees, ein

Holländer, nur die eigentliche Kettenregel bey kaufmännischen Rechnungen mehr in Aufnahme gebracht hat. Denn als Erfinder dieser Regel kann Rees nicht betrachtet werden, indem schon Peter Apian eine ähnliche Vorschrift giebt in dem Buche: Ein Newe Vnd wolgegrundte vnderweysung aller Kauffmanß-Rechnung . . . durch Petrum Apianum von Leyßnik, d'Astronomei zu Ingolstadt Ordinarium. Gedruckt . . . 1527. Noch früher und deutlicher findet man die Kettenregel im folgenden Buche gelehrt: Rechnung auff der linihen und federn in zal, maß und gewicht auff allerley handierung, gemacht und zusammengelesen durch Adam Riesen v. Staffelstein Rechenmeyster zu Erfurdt im 1522. Jar. Jtzt vff sant Annabergk. Gedruckt ym Jar 1525. (vergl. das von Hrn. Chelius oben angeführte Buch S. 176).

Von den Vermehrungen will ich nur einige anführen. Bey der Lehre von der Wurzelausziehung demonstrirte ich eine weniger bekannte Methode, diese Operation durch bloße Division schnell zu vollenden. Die Lehre von den Brüchen erhielt durch die Sexagesimalrechnung eine von Mehreren gewünschte Vermehrung. Als Anwendung der arithmetischen Proportionen fügte ich die Zeitrechnung mit einer kurzen Darstellung unserer Kalendereinrichtung bey. Eben so zeigte ich die Anwendung der geometrischen Proportionen auf verschiedene kaufmännische Rechnungsfälle, z. B. den Gewinn oder Verlust, die Tara, den Rabat rc. zu berechnen. Da ferner die Kenntniß der Wechsel- und Wechselkommissionsrechnung auch ausserhalb der Sphäre des eigentlichen Banquiers noch für Viele interessant bleibt: so stellte ich die wichtigsten Momente dieser Rechnungen auf eine Weise dar, welche ich für die faßlichste hielt. Die Vortheile, welche die sogenannte wälsche Praktik dem Rechner gewähren soll, wurden kurz erörtert. Von anderen Regeln,

welche ebenfalls mit zur goldnen Regel gehören, zeigte ich, wie man sie auf mehrere Rechnungsfälle gesetzmäßig anwenden könne.

Die Beylagen für die Reduktionszahlen wurden durch die Anführung der hebräischen, griechisch n und römischen Maße und Gewichte vermehrt. Weiter enthalten dieselben meine eigenen Untersuchungen der in Würzburg noch üblichen Maße und Gewichte, die Berichtigung der Hubert'schen Zahlen für die Getreidmaße, und die Vergleichungen derselben Maße und Gewichte mit den in den Königreichen Baiern u. Würtemberg gesetzlich eingeführten. Zum Beschlusse des Buches habe ich noch Einiges, zur Geschichte der würzb. Münzen und Gemäße gehöriges, gesagt. Vielleicht verbreite ich mich bey einer anderen Gelegenheit und mehr Muße weitläufiger über diesen Gegenstand.

Bey der etwas detaillirteren Darstellung des metrischen Systems in Frankreich, machte ich auf die Richtigkeit der Basis dieses Systems, so wie auf die Vorzüge der Dekadik und der mit ihr gegebenen zehntheiligen Eintheilung, so wie auf die Vortheile der Dezimalrechnung aufmerksam. Schon die Erfinder oder ersten Verbreiter dieser Rechnung waren von dem großen Nutzen derselben fest überzeugt. Simon Stevin, dessen Werke Girard im J. 1634 zu Leyden französ. herausgab, welchem wohl das größte Verdienst um die Kenntniß und Verbreitung der Dezimalrechnung gebührt, wollte die zehntheilige Eintheilung durchaus, auch die Ausprägung der Münzen nicht ausgenommen, ausgedehnt wissen. Erst in dem neufranz. Maß- und Gewichtssystem sehen wir Stevin's Wünsche gänzlich realisirt. Das nächste, oder auch gleiche Verdienst um diese Rechnung erwarb sich Joh. Hartmann Beyer, Arzt zu Frankf. a. M., welcher sich derselben zuerst in seiner Schrift „Stereometria inanium nova et facilis ratio (Francof. 1603)" bediente, und sie späterhin in seiner Logistica

decimalis (Frankf. 1619) ausführlich lehrte. Beyer scheint weder Stevins Werke, noch das Buch des berühmten Adrian Roman (medici Louaniensis) „Ideae mathematicae pars prima" (Antwerpiae 1593; fertig war es schon 1590), in welchem Roman bey der Zahl für die Kreislinie von den Dezimalen Gebrauch machte, gekannt zu haben. Nach Chelius Nachricht (S. 176 des oben gen. Buches) hielt sich Beyer für den Erfinder der Dezimalrechnung, indem er am Rande des Titelbl. des oben zuerst angef. Buches eigenhändig beyschrieb: Δεκαρίδμησιν inveni anno 1599. sed prima ejus rudimenta An. 1597. — Was ich sonst Geschichtliches von älteren Mathematikern an mehreren Stellen meines Buches angeführt habe, ist vielleicht manchem meiner Leser nicht uninteressant, so wie die neu beygefügte Inhaltsanzeige sowohl wegen der schnellen Uebersicht aller abgehandelten Materien, als zum Behufe des Nachschlagens willkommen seyn dürfte.

Schon diese kurze Aufzählung dessen, was ich zur Verbesserung und Vervollständigung meines Rechenbuches gethan habe, wird einen jeden überzeugen, daß ich das wirklich zu leisten und zu geben bemüht war, was das Titelblatt verspricht. Eine blose Vergleichung der vorigen Ausgabe mit der gegenwärtigen nach der Bogenanzahl würde hier ein unrichtiges Urtheil begründen, indem zu der letzteren ein größeres Format, engerer Satz und kleinere Lettern gewählt wurden.

Möge denn meine Schrift auch in ihrer neuen Gestalt weder den beabsichtigten Nutzen, noch den Beyfall des gelehrten Publikums verfehlen.

Würzburg den 10ten Dezember 1814.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

I. Entwickelung des Begriffes und der Natur der Zifferrechnung.

Seite.

1. Begriffe von Quantität, Quantum, Maß oder Einheit, und Begriff der Zahl, . . . 1
was Arithmetik, und Rechnen heiße; Zeichen der Zahlen und ihre gewöhnliche Eintheilung, . . 2
ältere Benennung der Zeichen und Eintheilung der Zahlen; 3
Zahlzeichen der Griechen und Römer; . . 4
Ursprung unserer Zahlzeichen; . . . 13
Begriff der Zifferrechnung . . . 4
2. Erste Darstellung der Dekadik; . . 5
Weigels Tetraktyk; Leibnitzens Dyadik; Weidler's Dodekadik und Darstellung dieser Systeme; . . . . 6—7
das Anschreiben und Aussprechen der Zahlen; 7—9. 13
das Aussprechen großer Zahlen in lateinischer Sprache; . . . . 10—11
wie die Griechen und besonders Archimed große Zahlen ausdrückten. . . 11. 12
3. Das Numeriren hinsichtlich der zehntheiligen Zahlen 14. 15

**

Seite

II. Theile der gemeinen Arithmetik.

Aufzählung der Stammspezies und Eintheilung der Zahlen . . . . 16—19

Theile der Ziffernrechnung . . 19. 20

III. Erklärung der gebrauchten Ausdrücke und der arithmetischen Zeichen. . 20. 21

IV. Unmittelbar klare Sätze . 22

Erster Theil.

Die vier Spezies in ganzen Zahlen.

Erster Abschnitt. Die Addition.

Begriff derselben; . . . 25

Regel; Beweis; Proben über die Addition . 24—29

Zweyter Abschnitt. Die Subtraktion.

Begriff derselben, und arithmet. Zeichen . 29

Regeln derselben mit den Beweisen . 30—33

Proben 33. 34

Dritter Abschnitt. Die Multiplikation.

Begriff derselben und arithmet. Zeichen . 34

Das Einmal-Eins und Nepers Rechenstäbchen 35. 36

Regeln über Multiplikation sammt Beweisen 37—40

Proben . . . . 41—43

Vierter Abschnitt. Die Division.

Begriff und allgemeine Grundsätze derselben . 43—47

Divisionsfälle mit ihren Regeln und Beweisen 47—55

Praktische Vortheile 55. 56

Proben 57

Nutzen, richtige Anwendung und Rechtfertigung der sogenannten Neunerprobe . 25. 41. 57

Zusatz. Die Division, als Messung betrachtet.

Seite.

Was Maß, — gemeinschaftliches, gemeinschaftlich-größtes Maß, — relative Primzahlen und gleichvielfach zusammengesetzte Zahlen seyen? und Lehrsatz hinsichtlich der letzteren . . . 60. 61

Das gemeinschaftliche und gemeinschaftlich-größte Maß zu finden . . . 63

Den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend zu finden . . . . 64—66

Die Art mit Steinchen oder Rechenpfenningen zu rechnen . . . 67—72

Zweyter Theil.

Vom Erheben zur 2ten und 3ten Potenz und dem Wurzelausziehen.

Einleitung. Begriff von Dignität oder Potenz und Wurzel überhaupt, und insbesondere vom Quadrate und Würfel; . . 73

Begriff vom Erheben und Wurzelausziehen und Bezeichnungsart . . . 74

Erster Abschnitt. 1) Jede ganze Zahl dadurch zum Quadrate zu erheben, daß man die konstitutiven Bestandtheile des Quadrates erzeugt und summirt, mit Beweis und Probe . 75—83

2) Die 2te Wurzel aus ganzen Zahlen aufzufinden 75-77. 83-89

Zweyter Abschnitt. 1) Jede ganze Zahl zur 3ten Potenz durch Bildung ihrer Bestandtheile zu erheben; . . . 90—98

und 2) durch Nachbildung dieser Theile die 3te Wurzel zu finden mit den Beweisen und Proben . . 90. 91. 98-102-107

	Seite.
Anmerk. 1. Demonstrirte Methode, größtentheils durch blose Division die Wurzeln aufzufinden	102—107
Anmerk. 2. Eine Aufgabe des Dr. Hauff mittels der Potenzenlehre gelöst . .	107—109
(Wie man sich dem wahren Werthe einer Wur-(zel mit Hilfe der Dezimalrechnung nähern (könne?	142
(Demonstrirte Näherungsmethode älterer Ma-(thematiker	143. 144
(Das Potenziren und Wurzelausziehen	
(a) hinsichtlich gemeiner Brüche . .	125. 126
(b) — — zehntheiliger — . .	141. 142

Dritter Theil.

Die Lehre von den Brüchen.

Einleitung. 1) Begriff des Bruches überhaupt, eines Stamm- oder abgeleiteten, ächten oder unächten Bruches . . .	110—113
2) vom Verwandeln der Brüche . .	113—117
3) Werths-Bestimmung ächter Brüche .	117
4) Eintheilung der Brüche . .	119
Erster Abschnitt. a. Addition, b. Subtraktion gemeiner Brüche . . .	120. 121
c. Multiplikation dieser Brüche . .	121—124
d. Division	124. 125
e. Die Insition . . .	126
Zweyter Abschnitt. Nähere Erklärung des Dezimalbruches und der Dezimalzahl .	126
α) Numeration der Dezimalzahlen .	14. 15
β) Addition und Subtraktion . .	129—31
γ) Multiplikation mit einer Erleichterungsmethode	131—35

Inhalt.

Seite.

d) Division und Fortsetzung der Division . . . 135—39

Anmerk. über das Abkürzen der Dezimalzahlen . . . 140

Dritter Abschnitt. Erklärung der Sexagesimalen und Bezeichnung . . . 145

Gesetzmäßige Verwandlung derselben . . . 145—147

Addition und Subtraktion . . . 148—150

Multiplikation . . . 149

Division . . . 149—153

Anmerk. Die Proben und den Sinn dieser Operationen betreffend . . . 154—156

Vierter Theil.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen.

Erklärung und Eintheilung der Verhältnisse und der Proportionen, und ihres Wesens . . . 157—161

Erster Abschnitt. Die für die arithmetischen Proportionen gültigen Hauptwahrheiten . . . 161—163

Zweyter Abschnitt. Lehrsätze über die geometrischen Proportionen und Verhältnisse . . . 164—171

Dritter Abschnitt. Anwendung der Lehre von den Proportionen . . . 171

I. Anwendung der arithmetischen Proportionen auf die Zeitrechnung.

1) Vorkenntnisse: was Sonn- und Mondjahr, gemeines bürgerl. J. und Schaltjahr sey? . . . 171. 172

2) Das türkische und jüdische Jahr, und wie man diese Jahre auf Jahre unserer Zeitrechnung bringen könne . . . 173. 174

3) Von der Zeitrechnung der Griechen . . . 175

4) Von der Zeitrechnung der Römer (ab V. C.) . . . 175

5) Von der christlichen Zeitrechnung und der Einrichtung unseres Kalenders . . . 176

Seite.

Der immerwährende Gregorianische Kalender und dessen Gebrauch . . . . 177—180
6) Die Julianische Periode . . 181. 182
7) Die nabonassarische Aere . . 182. 183
8) Einige andere Beyspiele über die Zeitrechnung 183

II. Anwendung der geometrischen Proportionen.
Erklärung und Eintheilung der goldenen Regel 184—185
Beurtheilung, ob eine Aufgabe nach dieser Regel zu lösen sey? . . . 185

1. Einfache direkte goldene Regel.
a. Berechnung der Waaren und ihrer Preise . 185—187
b. Resolvirungs- und Reduktionsrechnung . 187—189
c. Rabat- oder Skontorechnung . . 189—191
d. einfache Zinsrechnung . . 191
e. kaufmännische Gewinn- und Verlustrechnung 191—193
f) Tararechnung . . . 193—195
g) Berechnung der nöthigen Arbeiter und Zeit ꝛc. 195. 196

2. Einfache indirekte goldene Regel.
α. Berechnung der zur verschiedenen Anzahl von Arbeitern nöthigen Zeit, und umgekehrt . 196. 197
β. Berechnung der Länge der Zeuge von verschiedener Breite 197
γ. Berechnung der Quantität Menschen, welche mit denselben Lebensmitteln verschiedene Zeiten hindurch auskommen sollen . . 197. 198
δ. In wieviel Zeit wird ein größeres Kapital dieselben Zinsen bringen, welche ein kleineres giebt? 198
ε) Termin- oder Zielrechnung nach einfachen Zinsen 198—201
Anmerk. Vortheile der wälschen Praktik . 201

3. Zusammengesetzte goldene Regel.
a. Berechnung der Verrichtungen der Arbeiter mit bestimmter Angabe der Haupt- und Zwischenzeiten ꝛc. 203
Reesische Regel . . . 205
Formel von Kraft und Wirkung, um dieselben Arten von Aufgaben aufzulösen . . 208

Seite.
b. Die zusammengesetzte Zinsenrechnung . 214
c. Die Berechnung einfacher Zinsen auf Monate u. Tage 215
d. Die Kettenregel . . . 218
e. Die Gesellschaftsrechnung . . 222
f. Die Vermischungsrechnung . . 225
g. Die Habereyrechnung . . . 226
h. Die Falcidienrechnung . . 227
i. Die Durchschnittsrechnung . . 228
Den mittleren W rth der Mischung zu finden ebend.
k. Die Repartitionsrechnung . . 230
l. Die Alligationsrechnung . . 231
m. Die Wechselrechnung . . . 235
n. Pari- und Arbitragerechnung . . 245—248
o. Die 8 Hauptfälle der Wechselkommissionsrechnung 248—258

Fünfter Theil.

Die Rechnungsarten mit benannten Zahlen verschiedener Art.

1. Reduktion 259
2. Addition 261
3. Subtraktion . . . 262
4. Multiplikation . . . 264
5. Division 266

Beylagen
zur
Rechnung mit benannten Zahlen.

Seite.

I. Alte Maße. A. hebräische . . . 269
B. griechische . . . 270
C. römische . . . 275
II. Neuere Maße. 1. neufranzösisches Maß- und Gewichtssystem . . . 281
Bemerkung über die Richtigkeit der Basis dieses Systems 287
und über das Nützliche desselben im Vergleiche mit anderen Systemen . . . 289
2. gesetzlich eingeführte Maße und Gewichte im Königreiche Baiern . 291
3. Maße und Gewichte in Würzburg theils nach Huberti's Angaben, theils nach meinen eigenen Untersuchungen und Berichtigungen der ersteren . . . 293
Vergleichungstabellen rücksichtlich dieser und der baier. Maße und Gewichte . . 305
4. Maße und Gewichte im Königreiche Würtemberg, tabellarisch und mit einigen Hauptvergleichspunkten dargestellt . 308
5. Einiges über die türkischen Maße und Gewichte . . 309

Inhalt.

Seite.

6. Sonst gewöhnliches Längen- Flächen- und Körpermaß.

a. Längenmaß. α) Ruthe, Fuß, ihre verschiedenen Eintheilungen; Reduktion dieser Maße nach der 12theiligen Eintheilung in gleiche nach der 10theiligen und umgekehrt . . . 312

Tabelle über verschiedene Rutheneintheilungen . 314

Die Art, wie man die verschiedenen Fußmaße richtig aufeinander reduziren könne . . 315

Das in Bergwerken übliche Lachtermaß . 317

Vergleichungstabelle mehrerer Fuß- und Ellenmaße . 318

β) Die Meile, als Einheit betrachtet 321

Tabelle der üblichen Meilen, um die eine auf die andere reduziren zu können . . 322

b. Flächenmaß 1) Quadratfuß, Quadratruthe; ihre verschiedenen Eintheilungen und Methode, sie aufeinander zu reduziren . 324

Reduktion der verschiedenen □f. und □r. . 325

2) Morgen oder Tagwerk; Tafel der verschiedenen Morgen . . 327

wie diese aufeinander zu reduziren seyen? . 329

c. Körpermaß. Maße für die verschiedenen Körper 333

α) Maß für geometrische Körper; verschiedene Eintheilung dieses Maßes und Reduktionsweise 334

Kenntniß des Holzmaßes . . 337

β) Hohlmaße für flüssige Waare mit ihren verschiedenen Eintheilungen und Reduktionszahlen 339

γ) Eben so von den Hohlmaßen für trockene Waare 342

III. Vom Gewichte. 1. Das Pfund, als Gewichtseinheit, und dessen Eintheilung . 345

Das köllner Markgewicht . . 346

Das franz. und holländ. Troygewicht . 347

Seite.

Vergleichungen dieser Gewichte mit anderen merkwürdigen Gewichten . . 348
2. vom Silber- und Goldgewichte . 352
3. vom Juwelengewichte . . 353
4. vom Apothekergewichte . . 354
Tabelle über Handels- und Medizinalgewichte 356
Tabelle zur Reduktion des teutschen Apothekergewichtes, des französischen und holländischen Troygewichtes auf Theile des Gramme . 357
IV. Vom Zeitmaße. . . 358
V. Von der gewöhnlichen Eintheilung solcher Dinge, die blos gezählt werden 358
VI. Von den Münzen. 1) Was reelle und fingirte Münzen; Schrot, Korn einer Münze; rauhe und feine Mark sey; . . 359
was man löthig und karätig nenne . 360
2) Der Münzfuß. a) Verschiedene Münzfuße im Silber . . . 360
b) im Golde . . . 361
3) Prüfung der Münzen . . 362
4) Tabelle verschiedener Rechnungsmünzen 362
5) Tabellen verschiedener geprägter Münzen 364
Einiges Geschichtliche in Betreff der Münzen und Maße in Würzburg . . . 369

Verbesserungen.

Seite 13 Zeile 4 statt Einheit l. Ordnung.
— 51 — 28 st. d. i. 6 = 500 l. d. i. 5 = 500.
— 150 — 5 l. $= 60^2 + \frac{60^2}{3}$.
— — — 27 st. $\frac{12''}{4^4} = 3$ l. $\frac{12_{''}}{4''} = 3^{\circ}$.
— 151 — 7 st. $\frac{12^{IV}}{3}$ l. $\frac{12^{IV}}{3''}$.
— 153 im Beysp. 3 ist 02'' 03''' der Divisor.
— 156 Zeile 5 l. Stunde.
— 233 — 2 st. $\frac{0}{01}$ l. $\frac{9}{10}$.
— 261 — 12 st. 300000'' l. 3000000''.
— 274 — letzte in Nro. 14. st. Aegium l. Aegina.
— 275 — 32 st. kugelförmiger l. kegelf.
— 315 — 15 st. 1499, ... millim. l. 1949, ...
— 324 (sub b. Flächenmaß). Die Angabe, daß 1 □ruthe Waldes = 196 Quadr. f. sey, rührt lediglich davon her, daß in mehreren älteren Schriften die Vermessung der Wälder nach Brabander Ruthen angegeben, und angenommen wurde, daß 1 brab. Ruthe Längem. genau = 14 würzburg. Werkf., demnach die □ruthe = 196 würzb. □fuß sey. Allein die Wälder wurden ehemals mit der an jedem Orte üblichen Ruthe vermessen, so wie auch die Bestimmung der Anzahl Ruthen auf 1 Morgen schlechterdings keine gesetzliche Regel hatte.

Einleitung.

I.

Entwickelung des Begriffes und der Natur der Ziffernrechnung.

§. 1.

Dasjenige an einem Dinge, was vermehrt oder vermindert werden kann, heißt die Größe oder Quantität des Dinges. So bestimmt an der drey Schuh langen Linie das „drey Schuh lang" die Quantität der Linie.

Das Ding selbst, dem man Quantität zuschreibt, heißt eine Größe, Quantum; so ist die drey Schuh lange Linie ein Quantum.

§. 2. Das, woraus man die Quantität eines Dinges entsprungen denkt, heißt das Maß oder die Einheit. So ist in Ansehung der Erzeugung der Quantität der vorgenannten Linie der Schuh, welcher dreymal gesetzt, die drey Schuh-Länge, oder die Quantität der Linie erzeugt, dieses Maß.

§. 3. Zahl heißt die Größe, welche man sich aus der Wiederholung derselben Einheit entsprungen denkt.

Anmerkung. „Unitas autem, sagt der berühmte Peurbach (in seinem Buche: Elementa Arithmetices. Algorithmus de numeris integris, fractis etc. Omnia recens in lucem edita fide et dilig. sing cum praefacione Philip. Melanth. Am Ende „Impressum Vitebergae

per Jos. Klug. 1536.) non est numerus, sed principium numeri. Unde ipsa habet se in Arithmetica ad numerum, sicut punctum in Geometria, ad magnitudinem." Das Letzte ist nicht ganz richtig, und in Bezug auf das Erste hätte er bemerken sollen, daß jedoch die Einheit, so wie auch die Nulle, wie eine wirkliche Zahl behandelt werden könne.

§. 4. Die Wissenschaft der Zahlen heißt Arithmetik.

§. 5. Rechnen heißt das Auffinden einer Zahl aus anderen gegebenen Zahlen.

§. 6. Eine Zahl ist der andern Zahl (oder auch mehreren gegebenen Zahlen zusammengenommen) gleich, wenn sie mit dieser (oder mit diesen zusammengenommen) einerley Quantität, oder einerley Menge derselben Einheiten enthält.

§. 7. Das, wodurch man die Zahl, welche man bey sich im Denken, etwa mittels des wiederholten Zählens derselben Einheit an den Fingern, erzeugt hat, auch andern kenntlich macht oder bezeichnet, heißt das Zeichen der Zahl.

§. 8. Dergleichen willkührlich angenommene Zeichen für die Zahlen sind die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, mittels derer Zusammensetzung jede auch noch so große angebbare Zahl bezeichnet werden kann.

Man theilt diese Ziffern in bedeutende oder Zahlziffern und unbedeutende. Jene bezeichnen eine bestimmte Vielheit von einerley Einheiten; diese den Mangel dieser Vielheit, oder den Mangel der Einheit überhaupt. Zahlziffern sind demnach alle Ziffern von 1 bis 9; aber 0, welche Null oder Nichts heißt, ist die unbedeutende Ziffer.

Anmerkung 1. Aeltere Mathematiker, wie Gemma Frisius, Arzt und Prof. zu Löwen, (in s. Buche „Arithmeticae practicae methodus facilis" — von welchem ich wohl eine der ältesten Ausgaben „Vitteb. 1542" besitze, indem Heilbronner nur eine Ausgabe von 1544 und

Kästner eine andere von 1548 kennt. Gemma scheint übrigens der erste zu seyn, welcher nur von 4 Species spricht.) — Hudalrichus Regius (in seinem Buche „Utriusque Arithmetices Epitome, ex variis autor. concinnata, nunc denuo in lucem edita etc. Friburgi Brisgoiae Steph. Melechus Gravius excudebat anno 1543. Kästner scheint dieses sehr merkwürdige Epitome gar nicht gekannt, und Heilbronner, welcher eine Ausg. von 1550 anführt, scheint dasselbe nicht gesehen zu haben, sonst würde er aus dem vorgesetzten Carmen Apollonaris Burcardi ad pium Lectorem haben ersehen können, daß Hudalrich (regius est dictus nomine reque simul) mit großem Lobe Prof. d. Mathem. zu Freyburg war. Nebenher erfährt der Geschichtschreiber im 2ten Buche dieses Epit., daß Freyburg im J. 1118 „a tertio Beroltoldo duce Zaringiae condi caeperit" — Das Dorf Zähringen mit dem wüsten Stammschlosse der Herzoge dieses nun verloschenen Namens liegt eine Stunde von Freyburg.) — Georg Peurbach in seinem oben angeführten Buche (das weder Heilbr., noch Kästner scheinen gekannt zu haben) und Christoph Clavius von Bamberg (in s. Epitome Arithm. pract. Romae 1585) nennen die Ziffern von 1—9 Figuren, und nur die Nulle nennen sie Ziffer (cyphra, cifra, zyphra, deren Benennung Hudalrich von einem orientalischen Worte ableitet); die Zahl selbst theilen die ersten Mathematiker in digitum, articulum et numerum compositum. Unter digitus verstehen sie eine Zahl kleiner als 10, unter articulus jede durch 10 meßbare Zahl, wie 10, 20, 30 und unter compos. sive mixtus jede aus dem digit. und artic. bestehende, und überhaupt jede zwischen 2 nächste articuli fallende Zahl, wie 11, 12.

Anmerkung 2. Als Zahlzeichen bedienten sich die Griechen und alten Lateiner der Buchstaben. Die Lateiner hatten folgende fünf Buchstaben: I, V, X, L, C, durch

deren Zusammensetzung sie die höhern Zahlen ausdrückten; so bezeichnete CIↃ, woraus durch die Abschreiber M wurde, die Zahl Tausend, und IↃ, woraus D späterhin wurde, die Zahl Fünf-Hundert. Die Griechen aber bedienten sich, wie die Phönizier und Hebräer, der Buchstaben ihres Alphabets, und zwar ließen sie das ἐπίσημον ς die Zahl Sechs bedeuten, damit ihr ι, wie das Jod der Phönizier die Zahl 10 ausdrücken konnte. Eben dieser Uebereinstimmung wegen wählten sie auch als Zeichen für die Zahlen 90 und 900 die ἐπίσημα ϟ und ϡ. Das folgende Schema stellt einige dieser Zahlzeichen dar:

1	α	I	10	ι	X	100	ρ	C
2	β	II	20	κ	XX	200	σ	CC
3	γ	III	50	λ	XXX	500	φ	IↃ, IↃ, D
4	δ	IV	40	μ	XL	800	ω	DCCC
5	ε	V	50	ν	L	900	ϡ	DCCCC
6	ς	VI	60	ξ	LX	1000	α	CIↃ, CIↃM
7	ζ	VII	70	ο	LXX	2000	β	IIM, MM
8	η	VIII	80	π	LXXX	5000	ε	VM, IↃↃ
9	θ	IX	90	ϟ	XC	6000	ς	VIM, IↃↃMM

10000	ι	CCIↃↃ
20000	κ	XXM, CCIↃↃCCIↃↃ
50000	ν	IↃↃↃ
60000	ξ	LXM, IↃↃↃCCIↃↃ
100000	ρ	CCCIↃↃↃ

§. 9. Die Rechnung mittels dieser Ziffern heißt die Zifferrechnung oder der Zifferkalkul, und die Arithmetik, welche die Regeln dieser Ziffernrechnung angiebt und beweist, heißt die gemeine Arithmetik oder Rechenkunst (Algorithmus bey den ältern Mathematikern.)

§. 10. Da jede Ziffer von 1 bis 9 entweder nur die Einheit oder eine bestimmte Vielheit dieser Einheiten für sich ausdrückt: so mußte man auf eine Art denken, wie es möglich wäre, daß durch diese Zusammenstellung der Ziffern eine jede angebbare Vielheit von Einheiten ausgedrückt werden könnte.

Man bestimmte nun vorerst die Steigerung des durch die Ziffer 1 bezeichneten Zahlwerthes nach dem dekadischen Gesetze, d. i. so, daß durch diese Ziffer immer ein zehnfach höherer Zahlwerth ausgedrückt würde, so wie man sie nur um eine Stelle weiter gegen die Linke hinrückte.

Dieses Hinrücken gegen die Linke bewirkt man dadurch, daß man der Ziffer 1 Nullen zur Rechten anhängt.

Es bezeichnet demnach 10 einen zehnfach höheren Werth der Einheit, oder des durch die Ziffer 1 ausgedrückten Zahlwerthes, nämlich einen Zehner; 100, oder die Ziffer 1 an der dritten Stelle zur Linken bezeichnet einen zehnfach höheren Werth eines Zehners, oder von 10, nämlich Hundert; 1 mit 3 Nullen oder 1000 bezeichnet einen zehnfach höheren Werth von Hundert, nämlich Tausend u. s. w. Die Zahl 1 an der 7ten Stelle, oder 1000000, bezeichnet den zehnfach höheren Zahlwerth von Hunderttausend, oder von 100000, nämlich Zehnmalhunderttausend, oder Tausendmaltausend, was man auch kurz Million nennt, u. s. w. Die Ziffer 1 an der 13ten Stelle bezeichnet den zehnfach höheren Werth von hunderttausend Millionen, nämlich tausendmaltausend Millionen, welche man auch eine Billion nennt.

Der durch die Ziffer 1 bezeichnete Zahlenwerth wird demnach vermöge ihrer Stelle, welche sie zur Linken hin einnimmt, folgendermaßen gesteigert:

1 10 100
Eins, Zehn, Hundert,
1000 10000 100000
Tausend, Zehntausend, Hunderttausend,
1000000 10000000 100000000 u. s. w.
Million, Zehn Million, Hundert Million,
Tausend Million, Zehntausend Million, Hunderttausend Million.
Billion, Zehn Billion u. s. w.
Tausend Billion u. s. w.
Trillion u. s. w.

Anmerkung. Diese Art, von 1 zu 10, von 10 zu 100 u. s. w. in jeder Ordnung, d. i. immer nur bis Zehn zu zählen, nennt man das dekadische oder Decimalsystem, oder die Dekadik, welcher sich unsere Lehrer, die Griechen und Römer bedienten. V. Weigel hat in seiner Aretologistica vel logistica virtutum genitrice (Nürnb. 1687) eine Tetractyk dargestellt, nach welcher alle arithmet. Operationen nur mit Hilfe der 4 Ziffern 1, 2, 3, 0 vollendet werden. Gelegenheit zu dieser mehr sinnreichen, als nützlichen Erfindung gab das III. Problem im XV. Abschnitte der Probleme des Aristoteles.

Leibnitz erfand die Dyadik, oder die Methode, die Rechnung blos mit Hilfe von 1 und 0 zu bewerkstelligen; er machte sie im J. 1703 der par. königl. Akademie d. Wissensch. bekannt, und bediente sich dieses Systems zur Aufdeckung der Geheimnisse, worein die Philosopheme der Sinesen von ihrem Könige Fohy gehüllt worden waren. Obgleich Leibn. weit entfernt war, durch seine Dyadik unsere Dekadik zu verdrängen: so ließ er doch eine Denkmünze mit einigen Rechnungen nach seinem System und mit der Ueberschrift prägen „omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum" (eine Anspielung auf die Schöpfung aus Nichts.)

Die in den neueren Zeiten wieder aufgestellte, und über Gebühr gepriesene Dodekadik, welcher, so wie auch dem Zählen nach 16, schon Leibnitz das Wort redete, führt schon Weidler (in differt. de praestantia Arithm. decad. Wittenb. 1719) an; seine Zeichen für 10 und 11 sind <, >; in neueren Zeiten wählte man dafür 𝓁, Ɛ oder die umgekehrten Siebner und Dreyer, und Zahlen, wie 2364 sprach man so aus: 2 Dodekaden, 3 Zwölfer, 6 Dutzend und 4 Einheiten.

Das folgende Schema enthält eine kurze Zusammenstellung dieser verschiedenen Zahlenbezeichnungen nach den genannten Systemen:

Dekad.	Tetract.	Dyadik.	Dodekad.
1	1	1	1
2	2	10	2
3	3	11	3
4	10	100	4
5	11	101	5
6	12	110	6
7	13	111	7
8	20	1000	8
9	21	1001	9
10	22	1010	< L
11	23	1011	> Ɛ
12	30	1100	10
13	31	1101	11
14	32	1110	12
15	33	1111	13
16	100	10000	14
. . .	. . .	. . .	. . .
21	111	10101	19
22	112	10110	1<1L
23	113	10111	1>1Ɛ
24	120	11000	20
. . .	. . .	. . .	. . .
30	132	11110	26
40	220	101000	34
50	302	110010	42

§. 11. Kurze Ausdrücke für diese verschiedenen Werthe der Einheit, so wie ihre Ziffer gegen die Linke hin verschiedene Stellen einnimmt, sind: die Einheit ohne Beysatz, oder 1; die Einheit der ersten Ordnung, oder 10; die Einheit der zweyten Ordnung, oder 100; die Einheit der dritten Ordnung, oder 1000 u. s. w.

§. 12. Will man nun nicht blos die Einheit von einer gewissen Ordnung, sondern eine bestimmte Vielheit von Einheiten derselben Ordnung ausdrücken, so tritt an die näm-

liche Stelle der Ziffer 1 nun irgend eine andere bedeutende Ziffer; so drückt z. B. 40 vier Einheiten der ersten Ordnung, oder vier Zehner; 5000 fünf Einheiten der dritten Ordnung, oder fünf Tausend aus. Der Werth der Einheit, welchen die Ziffer 1 an ihrer bestimmten Stelle ausdrückt, wohin nun eine der andern bedeutenden Ziffern gerückt ist, heißt der Generalwerth dieser Ziffer; so ist ein Zehner der Generalwerth unserer obigen Ziffer 4 und Tausend der Generalwerth der Ziffer 5.

§. 13. So wie man also aus der Stelle der Ziffer 1 sogleich den durch sie ausgedrückten Werth der Einheit erkennt: so weiß man auch den Generalwerth jeder andern bedeutenden Ziffer aus ihrer Stelle. Hat man daher z. B. diese Ziffernreihe 1278945, wodurch eine Zahl ausgedrückt wird: so hat 8 den Generalwerth von Tausend, 9 den Generalwerth von Hundert u. s. w.

§. 14. Zur leichtern Benennung oder Bestimmung des Generalwerthes der Ziffern bedient man sich folgender Ausdrücke: Die Ziffer an der ersten Stelle zur Rechten heißt die Ziffer der Einer; die an der zweyten die Ziffer der Einheit von der ersten Ordnung, oder die Ziffer der Zehner; die Ziffer an der dritten Stelle die Ziffer der Einheit von der zweyten Ordnung, oder die Ziffer der Hunderte u. s. w.

§. 15. Aus §. 10. und §. 12. ist klar, daß sowohl der Werth der Einheit, als der Generalwerth jeder Ziffer nach dem dekadischen Gesetze vermehrt oder vermindert wird, je nachdem man entweder noch eine oder mehrere Nullen zur Rechten beyfügt oder wegläßt. Auf dieselbe Art wird der Generalwerth einer jeden Ziffer in einer Ziffernreihe vermehrt oder vermindert; füge ich z. B. zu 32 eine Null hinzu, so wird die Ziffer der Einer eine Ziffer der Einheit der ersten Ordnung u. s. w.

§. 16. Man nennt die Anweisung eine gegebene oder durch Ziffern ausgedrückte Zahl richtig auszusprechen, und eine genannte oder ausgesprochene richtig durch Ziffern auszudrücken, oder anzuschreiben, die Numeration.

§. 17. Allein das Aussprechen, wie das Anschreiben der Zahlen ist mit der richtigen Kenntniß des Generalwerths jeder Ziffer aus ihrer Stelle gegeben. Alle Regeln, welche man über das Numeriren geben mag, sind daher weiter nichts, als Vorschriften, wie man sich entweder jene Kenntniß schnell erwerben, oder nach ihr fertiger verfahren könne.

Was nun das Aussprechen einer angegebenen Zahl, z. B. 3428, betrifft, so weiß man sogleich, daß 8 den Generalwerth der Einer, 2 den der Zehner, 4 den der Hunderte, 3 den der Tausende habe, daß man folglich dieser Kenntniß gemäß sprechen müsse: Dreytausend, vierhundert, zwanzig und acht, oder acht und zwanzig.

Bey einer größeren Ziffernreihe erleichtert man sich den Erwerb jener Kenntniß und das Aussprechen der durch jene Reihe ausgedrückten Zahl dadurch, daß man die Reihe in Klassen von der Rechten zur Linken abtheilt, zu jeder Klasse 3 Ziffern nimmt, auf die 7te Ziffer einen Punkt, der Million bedeutet, auf die 13te 2 Punkte, die Billion bedeuten, u. s. w. setzt, und dann die Ziffer jeder Klasse so ausspricht, als wenn sie für sich eine Zahl bezeichneten, nur daß man den bezeichneten Werth der letzten Ziffer dazu spricht.

Beyspiel. Man soll die durch folgende Ziffernreihe bezeichnete Zahl aussprechen:

23˙,456,074.

Hat man diese Reihe, wie ich bemerkte, durch die untern Striche in Klassen abgetheilt, und den Werth der Ziffern durch Punkte bezeichnet, so spricht man nun 23, aber wegen des, Million bedeutenden, Punktes spricht man 23 Million; 2) spricht man 456, aber wegen des Generalwerthes der Ziffer 6 spricht man 456tausend, und 3) Siebzig und Vier, oder Vier und Siebzig.

Anmerkung 1. Das Aussprechen der Zahlen in lateinischer Sprache betreffend, findet man bey den älteren Mathematikern durchaus keine Gleichförmigkeit. Zum Beysp. die Zahl 23′,456˙,345′,678 wird ausgesprochen a) nach

Gemma Frisius vicies et ter millies, millena millia, quadringenta quinquaginta sex millena millia, trecenta et quadraginta quinque millia, sexcenta et septuaginta octo. Denn Gemma lehrt, nach dem ersten Striche von der Rechten zur Linken zu sprechen millia; nach dem 2ten millena millia; nach dem 3ten millies millena millia, dann millies millies millena millia u. s. w. — b) nach Clavius viginti tria millia, millies, millies, quadringenta quinquaginta sex millia, millies, etc. (Hätte die Zahl noch eine Klasse Ziffern; so müßte man nach Clavius sprechen: 23 millia, millies, millies, millies), oder, wenn man, wie er sagt, nach Sitte der Italiener millena millia nennte milliones; so würde man besser sprechen; 23 millia millionum, quadringenta quinquaginta sex milliones etc. Man sieht wohl, wie schon Hudalrich bemerkt hat, daß das Aussprechen der Zahlen in latein. Sprache seine Schwierigkeit hat. Das Willkührliche aber, große Zahlen auszusprechen, hat bey uns darin seinen Grund, weil die von den römischen Schriftstellern angeführten Zahlen, nicht über eine Million gehen, daß sie uns folglich nur für kleinere Zahlen den reinen lateinischen Ausdruck lehren. So finden wir bey Cicero (in C. Verrem) die Zahl quindecies centena quadraginta quinque millia quadringenta et sedecim, d. i. die Zahl 1545416; und die Zahl 2235416 vicies bis centena triginta quinque millia etc. So würde man denn die Zahlen 1000000 und 48000000 lateinisch sprechen müssen: decies centena millia, und quadragies octies centena millia.

Bey größeren Geldsummen diente den Römern der Ausdruck Sestertium, welcher 1000 Sestertios anzeigte. Der Sestertius, den man schriftlich mit LLS, oder besser mit IIS (duae librae et semissis) bezeichnete, woraus durch Abschreiber HS wurde, war eine Silbermünze von dritthalb Aßen (nach unserem Gelde etwa ein Kayser- oder Silbergroschen). So bedeuteten decem oder

trecenta sestertia 10000 oder 300000 Sestertios, oder wenn man, wie mehrere rechnen, den Sestertius zu 2 Kreuzer annimmt, 10000 Gulden Allein das dem Ausdrucke Sestertium vorgesetzte adverbium numerale z. B. decies bezeichnet, daß man zwischen ihm und dem Worte sestertium (eigentlich sestertiorum) centena millia einschieben müsse; so decies sestertium heißet decies centena millia Sestertiorum, oder zehnmal hunderttausend, oder eine Million Sestertii; — sexagies oder millies sestertium bedeutet 60mal oder 1000mal Hunderttausend, d. i. die Zahlen 6000000 od. 100000000 Sestertii.

Uebrigens zählten die Römer auch noch nach Drachmen, Minen und Talenten, Münzen sonst nur den Griechen eigenthümlich. Die Drachma galt ungefähr so viel, als der römische Silber-Denar (nach unserem Gelde etwa 3 Groschen), und 100 Drachmen machten eine attische Mine. Das Talent (talentum) enthielt 60 Minas, das attische Talent berechnet man daher beyläufig zu 900 Gulden, nach anderen Angaben aber viel höher (man s. den Anhang.)

Anmerkung 2. Archimed hat durch seine berühmte Sandrechnung im Buche ψαμμιτης (arenarius) eine eigene Methode dargestellt, wie der Grieche die ungeheuersten Zahlen wenigstens mit Worten bezeichnen oder ausdrücken könne. Vor ihm stieg der Grieche nur bis zur Einheit der 4ten Ordnung in Zeichen und im Ausdrucke auf, und nannte diese Einheit Myriade. Indem er nun statt von 3 zu 3 Zahlzeichen, wie wir thun, von 4 zu 4 aufstieg, nannte er die Einheit der 8ten Ordnung, doppelte u. s. f. 3fache, 4fache . . . Myriontadika. Die Griechen sprachen demnach die Zahl 23|1279|4230|9874|6573 so aus:

23	vierfache Myriontadika
1279	dreyfache . . . .
4230	doppelte . . . .
9874	einfache Myriaden
und 6573	Einheiten.

Allein Archimed stieg von Klasse zu Klasse, jede mit acht Zahlzeichen, auf, indem er eine Myriade von Myriaden die Einheit der ersten Zahlen, die Myriade aber solcher Einheiten Einheit zweyter Zahlen ꝛc. nannte. Wir wollen jene erste Einheit Einheit erster Ordnung, die zweyte — Einheit zweyter Ordnung ꝛc. nennen. Nach Archimed würde man also obige Zahl so sprechen: 23 Einheiten zweyter Ordnung, 1279 Myriaden und 4230 Einheiten erster Ordnung, 9874 Myriaden und 6573 einfache Einheiten.

Auf diese Weise stieg Archimed bis zur Myriade von Myriaden solcher Klassen oder Ordnungen, deren jede 8 Zahlzeichen faßte, d. i. nach unserem Sprachgebrauche zur Einheit von der 800millionsten Ordnung oder zu 1 mit 800000000 Nullen auf. Scheint, sagt Archimed, diese Zahl noch nicht groß genug zu seyn: so nenne man diese ganze ungeheure Zahl die Einheit erster Periode, und steige von ihr abermals durch 800000000 Stellen zur Einheit zweyter Periode u. s. w. zur Myriade von Myriaden solcher Klassen oder Perioden auf. Allein er beweist, daß jene erste Zahl groß genug sey; denn schon die Zahl Eins mit 63 Nullen reiche hin, um die Anzahl von Sandkörnchen auszudrücken, welche, obgleich so klein, daß 10000 zusammen noch nicht die Größe eines Mohnkornes haben, doch einen ungeheuren Haufen bilden, größer, als die ganze Welt — selbst denn größer, wenn man deren Größe nach Aristarch's Hypothese schätze. Die Idee des unermeßlichen Weltalls hat nämlich vor diesem griechischen Philosophen kein Sterblicher schöner ausgedrückt, als dieser große Mann, indem er die Weite der ganzen Erdbahn gegen die Entfernung der Fixsterne zum Punkte verschwinden läßt. (Um sich auch nur einigermaßen zu überzeugen, daß die Einheit mit 63 Nullen eine wahrhaft ungeheure Zahl sey, darf man nur bedenken, daß der Mensch, auch wenn er 100 Jahre Tag und Nacht unausgesetzt und in jeder Minute 140 Zahlen zählte, denn doch nicht im Stande sey, bis zur Billion die Zahlen fortzuzählen.)

§. 18. Das richtige Anschreiben einer genannten Zahl betreffend, thun Anfänger wohl, wenn sie sich vorerst im richtigen Anschreiben der Einheit und der Ziffer der Einheit von einer gewissen Einheit üben. Würde z. B. verlangt, die Einheit von der vierten Ordnung, oder Zehntausend, zu schreiben: so müßte nach §. 11. und §. 10. geschrieben werden 10000. Nach §. 14. schreibt man jede bedeutende Ziffer der Einheit irgend einer Ordnung an, z. B. Vierzigtausend durch 40000.

Ist diese Uebung vorausgegangen; so wird der Anfänger sich darin üben, auch an den Stellen der Nullen bedeutende Ziffern einzurücken. Würde gesprochen: Vierzigtausend und sechs; so würde er vorerst 40000, und dann an der Stelle der letzten Null, als der Stelle der Einer, schreiben 6. Auf ähnliche Art würde er sich üben, immer mehrere Nullenstellen durch bedeutende Ziffern richtig auszufüllen.

Nach diesen Uebungen kann es nicht mehr schwer fallen, eine genannte Zahl durch eine größere Ziffernreihe sogleich richtig auszudrücken.

Anmerkung. Aus der Art, wie der Generalwerth der Ziffern in einer Reihe bestimmt ist, leuchtet ihr orientalischer Ursprung ein; indem die Morgenländer von der Rechten zur Linken schreiben; aber auch der durch die Ziffern bezeichnete Zahlwerth nur von der Rechten zur Linken verständlich ist. — Eigentlich sind die Ziffern indischen Ursprunges, was wir mit Recht aus den Zeugnissen der ältesten uns bekannten Schriftstellern eines arabischen Commentators über ein Gedicht des Poeten Tograi, und eines griechischen Mönchs Plamudes (man sehe Wallisii Math. univ. cap. 21. Op. Tom. I. p. 159 und Algebra cap. 3. op. T. II. p. 7.) schließen, ungeachtet wir sie zuerst von den Arabern gelernt haben. Gerbert, der als Pabst Sylvester II. 1003 starb, scheint zuerst die Ziffern aus Spanien geholt und sich derselben bedient zu haben (vergl. Kästner's Gesch. d. Mathem. I. Band.)

§. 19. Wir haben gesehen, daß man den Generalwerth einer jeden Ziffer nach dem dekadischen Gesetze, oder um das 10fache, 100fache u. s. w. dadurch steigere, daß man durch Anhängen von Nullen die Ziffer um eine oder 2 Stellen .. weiter gegen die Linke hinaufschiebt.

Das diesem Vermehren oder Steigern entgegengesetzte Vermindern des Generalwerthes der Ziffern geschieht ebenfalls durch eine dem vorigen Verfahren entgegengesetzte Operation, indem man nämlich die Ziffern um eine oder 2 Stellen ... weiter gegen die Rechte hinschiebt.

Wenn z. B. die Ziffer 4, statt vier einfache Einheiten oder Einer auszudrücken, einen 10fach geringeren Generalwerth bezeichnen soll; so setzt man an ihre Stelle eine Nulle, dieser rechts einen Strich oder Punkt, und nach diesem erst die Ziffer 4; man setzt nämlich 0,4 oder 0.4. Sollte dieselbe Ziffer den 100fach geringeren Generalwerth haben; so schöbe man sie durch das Vorsetzen einer Nulle noch um eine Stelle weiter gegen die Rechte, indem man setzte: 0,04. Den 1000fach geringeren Generalwerth hat sie im Ausdrucke: 0,004.

Diese Zahlen nun: 0,4, oder 0,04, oder 0,004 ... werden gelesen: 4 Zehntel, oder 4 Hunderttel, oder 4 Tausendtel ... Eben so würde man die Zahl 0,444 lesen. Nämlich die Ziffer am 1ten Platze rechts nach dem Striche oder Punkte bezeichnet Zehntel, am 2ten Platze aber Hunderttel, am 3ten nur Tausendtel u. s. w.

§ 20. Wenn man solchen Zahlen sowohl links, als rechts eine willkührliche Anzahl von Nullen anhängt, z. B. schreibt ... 0000,004000 ..., wodurch die Zahl 4 Tausendtel offenbar nicht geändert wird, und wenn man dann diese Nullenstellen mit bedeutenden Ziffern, wie im §. 18., gehörig ausfüllen lernt; so kann man auch diese Zahlen richtig anschreiben. Man soll z. B. anschreiben: 3 Einer, 5 Zehntel, 4 Tausendtel, 6 Zehntausendtel; so wird man die Ziffer 3 an die Stelle der ersten Nulle vor dem Striche, die Ziffer 5 an die erste Stelle nach dem Striche, die Ziffer 6 unmittelbar nach der Ziffer 4 setzen, also schreiben müssen: 3,5046.

Es erhellt hieraus deutlich, daß auch bey diesen Zahlen der Generalwerth einer jeden Ziffer von der Linken gegen die Rechte um das Zehnfache erhöhet werde. So bezeichnet in der zuletzt angeschriebenen Zahl die Ziffer 4 einen 10fach höheren Generalwerth, als die Ziffer 6, und die letzte Ziffer 3 zur Linken hat einen 10fach höheren Generalwerth, als die Ziffer 5.

§. 21. Das Aussprechen dieser Zahlen betreffend, ist noch zu bemerken, daß man nicht nothwendig jede einzelne Ziffer mit ihrem Generalwerthe aussprechen müsse, sondern daß man sie auch zusammen so aussprechen könne, daß man nur noch den Generalwerth der rechts zuletzt gesetzten, bedeutenden Ziffer noch mit ausspricht.

Es seyen z. B. die Zahlen 0,24, 3,067, oder 25,7009 auszusprechen. Statt nun zu sprechen 2 Zehntel, 4 Hunderttel; oder 3 Einer, 6 Hunderttel und 7 Tausendtel 2c. kann man zusammen so sprechen: 24 Hunderttel; oder 3067 Tausendtel, oder 257009 Zehntausendtel.

Die Richtigkeit dieser Art, unsere Zahlen auszusprechen, wird noch weiter unten erhellen.

Wenn man daher umgekehrt eine auf diese Art ausgesprochene Zahl richtig anschreiben will: so schreibe man vorerst die Zahl ganz nach § 18. an, ohne Rücksicht auf den zuletzt mitgesprochenen Generalwerth zu nehmen. Dann aber setze man den Strich um soviele Stellen von der Rechten gegen die Linke hin, als von der wievielsten Ordnung die Einheit des ausgesprochenen Generalwerthes ist. Spricht man z. B. die Zahl 325 Tausendtel; so schreibe ich vorerst die Zahl 325; weil ich aber im gesprochenen Generalwerthe Tausendtel die Einheit der dritten Ordnung gehört habe: so rücke ich den Strich um 3 Stellen gegen die Linke hin, indem ich schreibe: ,325, und weil keine bedeutende Ziffer mehr nach dem Striche links steht; so setze ich eine Nulle. Die gesprochene Zahl ist also, richtig geschrieben, diese: 0,325. Eben so schreibt man 324 Zehntel richtig, wenn man setzt: 32,4.

II.

Theile der gemeinen Arithmetik.

§. 22. Die besonderen Arten oder Weisen, die durch Ziffern ausgedrückten Zahlen zu behandeln, oder aus gegebenen Zahlen eine Zahl zu finden, heißen Rechnungsarten, oder Spezies der gemeinen Arithmetik.

Hieraus erhellt, warum das Numeriren (§. 16.) keine Spezies ist; die Kenntniß nämlich der Numeration gehört mit zur vollständigen Einsicht in das Wesen der Ziffern.

§. 23. Die Spezies sind entweder ursprüngliche, oder abgeleitete. Jene heißt man auch die Stammrechnungsarten. Dahin gehören die Addition und Subtraction. — In wiefern aber die gemeine Arithmetik Vorschriften enthält, das wiederholte Addiren und Subtrahiren zu erleichtern und zu beschleunigen, werden auch die Multiplikation und Division noch mit zu den Stammspezies gerechnet. Man hat also deren vier, ohne welche jede fernere Ziffernrechnung unmöglich ist. — Uebrigens nennt man jene 4 Stammrechnungsarten blos Spezies.

§. 24. Die Zahlen werden vorzüglich in drey Klassen getheilt: 1) in benannte und unbenannte; 2) in ganze und gebrochene; 3) in einfache oder Stammzahlen, und in zusammengesetzte.

§. 25. Eine Zahl heißt benannt, wenn die Eigenschaft oder Qualität der Einheit oder des Maßes, durch deren Wiederholung die Zahl entsprungen gedacht wird, bestimmt ist; z. B. 3 Gulden; 4 Schuhe . . . Im Gegentheile heißt sie unbenannt.

§. 26. Eine Zahl heißt in Beziehung auf eine andere gebrochen, wenn man zur ersten noch etwas hinzu thun muß, um sie der zweyten gleich zu machen. Diese zweyte Zahl heißt, in Beziehung auf die gebrochene oder den Bruch, das Ganze, oder die ganze Zahl. Jeden

Bruch bezeichnet man beym Aussprechen dadurch, daß man nach der gesprochenen Zahl das Wort Theil oder Tel mitspricht. Wenn wir z. B den Fuß oder Schuh, als bekanntes Längenmaß, in zehn gleiche Theile eintheilen, und jeden dieser Theile einen Zoll nennen: so ist hier der Fuß die Einheit, oder das Ganze, und jeder Zoll, als zehnter Theil des Ganzen ist ein Bruch. Hat man z. B. 4 Zolle, oder 4 Zehntels-Fuß: so ist klar, daß man noch 6 Zolle, oder 6 Zehntels-Fuß zur vorigen Zahl hinzuzählen müsse, um das Ganze oder einen Fuß zu erhalten.

Die ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. in wiefern sie in dieser längeren oder kürzeren Aufeinanderfolge gedacht werden, heißen auch die natürlichen Zahlen (numeri naturales.)

§. 27. Eine Zahl heißt eine einfache, oder Stammzahl, so fern man sie lediglich aus der Wiederholung der Einheit entsprungen denkt; zusammengesetzt heißt die Zahl, in wiefern sie aus der Wiederholung einer andern Zahl, entweder nach dem Gesetze einer dritten Zahl, oder nach demselben Gesetze dieser andern Zahl entsprungen gedacht wird. So sind, die Zahlen zwey und drey ꝛc. einfache Zahlen, weil sie dadurch entstehen, daß ich Eins mit Eins, oder Eins mit Eins und nochmals mit Eins zusammenzähle.

§. 28. Die zusammengesetzte Zahl, die aus der Wiederholung einer andern Zahl, nach dem Gesetze eben dieser Zahl, entsprungen gedacht wird, heißt die potenzirte Zahl, und die andere Zahl heißt, in Beziehung auf die potenzirte Zahl, Wurzel, oder Wurzelzahl. So ist z. B. die Zahl 6 eine bloß zusammengesetzte Zahl, weil, wenn ich die Zahl 2 nach dem Gesetze der Zahl 3 wiederhole, oder spreche: zweymal drey, die Zahl 6 entspringt.

Die Zahlen 2 und 3 sind, in Beziehung auf 6, die Stammzahlen dieser letztern, weil 6 aus jenen entsprungen gedacht wird. So heißen überhaupt alle einfachen Zahlen,

in Beziehung auf die zusammengesetzten Zahlen, Stammzahlen, weil jede zusammengesetzte Zahl aus den einfachen entsprungen betrachtet werden kann.

Die Zahl 9 aber ist zwar überhaupt auch eine zusammengesetzte Zahl, deren Stammzahl 3 ist; allein man kann sie auch als eine potenzirte, oder als Potenz betrachten; denn wiederhole ich die Zahl 3 dreymal, d. i. nach ihrem eigenen Gesetze, so entspringt die Zahl 9 als potenzirte Zahl; die Zahl 3 heißt dann Wurzelzahl, oder die Wurzel von 9.

§. 29. Da jede Zahl aus der Einheit entsprungen gedacht wird (§. 3.): so kann man auch jede gegebene Zahl wieder eigends mit der Einheit vergleichen, um zu sehen, wie sie aus dieser entspringe; so sehe ich z. B. wenn ich 4 mit 1 vergleiche, daß 4 aus 1 z. B: dadurch entspringt, daß ich noch 3 Einheiten zu jenem 1 hinzufüge.

Eben dieses Vergleichen findet statt zwischen der Einheit und der gebrochenen Zahl. Vergleiche ich z. B. $\frac{3}{4}$ (drey Viertel) mit 1: so sehe ich, daß $\frac{3}{4}$ aus 1 z. B. dadurch entsprungen ist, daß ich die Einheit in 4 gleiche Theile theilte, deren jeder folglich $\frac{1}{4}$ und das Ganze, oder die Einheit, gleich $\frac{4}{4}$ ist, und dann von diesen Theilen 3 genommen habe; daß ich demnach zu $\frac{3}{4}$ noch einen solchen Theil, oder $\frac{1}{4}$ hinzuthun müßte, um die Einheit wieder zu erhalten.

§ 30. Jedes solches Vergleichanstellen heißt die Zahlen mit der Einheit in ein Verhältniß bringen.

Jede Zahl involvirt also, oder drückt an und für sich schon dieses Verhältniß zur Einheit aus; man kann folglich dieses Verhältniß das unmittelbare oder ursprüngliche Verhältniß nennen.

§. 31. Wie man jede Zahl mit der Einheit vergleicht, so kann man auch jede Zahl mit jeder andern vergleichen, um zu sehen, wie die eine aus der andern entspringt. Z. B. 3 mit 2 verglichen, sieht man, daß 3 aus 2 z. B. entspringt, wenn man zu 2 noch die Einheit hinzu thut. Wüßte man

nun, wie 2 aus der Einheit entspringt, so wüßte man auch eben dadurch, d. i. mittelbarer Weise, wie die Zahl 3 aus der Einheit entspringt. Dieses wäre demnach ein mittelbares Vergleichen, oder man kann, in Beziehung auf das ursprüngliche Verhältniß (§. 30), das Verhältniß jeder Zahl zur andern das mittelbare oder abgeleitete Verhältniß nennen.

§. 32. Inwiefern man endlich ausdrücklich darauf sieht, daß diejenige Zahl, mit welcher man eine andere Zahl vergleicht, auf gleiche Art aus der Einheit entspringt, wie diese andere Zahl aus der mit ihr verglichenen: so setzt man selbst das unmittelbare Verhältniß mit dem mittelbaren in Vergleich, oder man erhält überhaupt eine Proportion. Wollte ich z. B. wissen, wie 3 aus der Einheit entspringt; so setzte ich: wie die Zahl 2 aus 1 entspringt, so entspringt auch die Zahl 3 aus 2.

§. 33. Aus dem Gesagten ist klar, daß die Proportion dienen kann, selbst eine mir unbekannte Zahl zu finden. Wollte ich z. B. wissen, welches die Zahl sey, die eben so aus 2 entspringt, wie 2 aus 1; so würde ich nur zu 2 die Einheit hinzu thun dürfen, um die mir unbekannte Zahl 3 zu erhalten.

Schon hieraus kann man schließen, wie nützlich die Proportionen werden angewendet werden können.

§. 34. Die von uns abzuhandelnden Theile der gemeinen Arithmetik sind daher folgende:

I. Die Lehre von den vier Spezies in ganzen, sowohl benannten, als unbenannten Zahlen von einerley Qualität oder Art.

II. Die Lehre von den Potenzen und der Auffindung ihrer Wurzeln, als ganzer Zahlen, in sofern jene Lehre in der Ziffernrechnung unentbehrlich ist.

III. Die Lehre von den gebrochenen Zahlen.

IV. Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen, und der Anwendung dieser Lehre.

V. Die Lehre von den ganzen benannten Zahlen von verschiedener Qualität.

Anmerkung. Wir setzen mit Fleiß Nr. III. nach II., weil die Lehre von den Potenzen, als ganzen Zahlen, auf die der Brüche angewendet wird; eben so setzen wir mit Fleiß Nr. V. zuletzt, weil die vollständige und gründliche Behandlung dieses Theiles Nr. IV. voraussetzt.

III.

Erläuterung der vorzüglichsten, in diesem Buche gebrauchten, Ausdrücke, und Begriff des arithmetischen Zeichens.

---

§. 35. Erklärung heißt die deutliche Angabe derjenigen Eigenschaften oder Merkmale eines Dinges, durch welche man in Stand gesetzt wird, das Ding von jedem andern zu unterscheiden.

§. 36. Lehrsatz heißt der nicht schon an und für sich klare Satz, worin eine neue Kenntniß von der Natur dessen, wovon gerade die Rede ist, aufgestellt wird.

§. 37. Aufgabe heißt die Forderung, daß etwas geschehen soll.

§. 38. Auflösung, oder Regel, die Aufgabe zu lösen, heißt die Angabe der Art, wie jener Forderung (§. 37.) Genüge geleistet werden kann.

§. 39. Beweis heißt die anschauliche Darlegung des Grundes, durch den man überzeugt wird, daß die im Lehrsatze ausgedrückte neue Kenntniß, oder die in der Regel angegebene Art, der Forderung Genüge zu thun, wahr und richtig ist.

§ 40. Zusatz oder Folgerung heißt jede aus einem schon gewissen Satze abgeleitete Wahrheit, welche keines neuen und eigenthümmlichen Beweises mehr bedürftig ist.

§. 41. Probe heißt die Prüfung, ob man in einem vorgelegten Beyspiele genau nach der Vorschrift verfahren sey, und ob man folglich das wirklich aufgefunden habe, was man durch Rechnung hat finden sollen.

Die Probe unterscheidet sich vom Beweise dadurch, daß uns der Beweis zu einer solchen Ueberzeugung führt, die wir Gewißheit nennen; die Probe aber uns nur Wahrscheinlichkeit giebt, daß wir uns nicht werden geirrt haben; indem man bey der Anstellung der an und für sich gewissesten Prüfung nicht sicher ist, ob man sich nicht wieder im Rechnen geirrt habe.

§. 42. Das Zeichen, dessen sich der Arithmetiker bedient, ist jederzeit nur eine abgekürzte Anzeige einer besondern Rechnungsart, oder eines eigenen Verhältnisses unter den Zahlen. Die arithmetischen Zeichen vertreten daher die Stelle der Rede. So ist z. B. $+$ (was man plus oder mehr ausspricht) das Zeichen der Addition, oder der Verbindung zweyer Zahlen; statt daß ich nämlich sage: man addire 4 zu 7, so setze ich kurz $4 + 7$ oder $7 + 4$. — So mit den übrigen Zeichen.

Anmerkung. Die einzelnen Zeichen werden jedesmal an dem Orte, wo sie zuerst gebraucht werden müssen, erklärt.

IV.

An und für sich klare Sätze, oder Grundsätze der Arithmetik.

---

§. 43. 1. Thut man zu gleichen Zahlen gleiche Zahlen hinzu: so kommen wieder gleiche Zahlen zum Vorschein.

2. Nimmt man von gleichen Zahlen gleiche Zahlen weg: so erhält man wieder gleiche Zahlen.

3. Zwey Zahlen, die einer dritten gleich sind, sind sich selbst gleich.

Oder:

Zahlen, die gleichen Zahlen gleich sind, sind sich selbst gleich.

4. Nimmt man alle Theile aus einem Ganzen weg, so bleibt nichts übrig.

5. Thut man die von einem Ganzen weggenommenen Theile zu den übriggebliebenen Theilen wieder hinzu, so kömmt das Ganze wieder heraus.

Der gemeinen Arithmetik Erster Theil.

Die vier Spezies in ganzen sowohl benannten als unbenannten Zahlen von einerley Art.

Erster Abschnitt.

Die Addition.

§. 1.

Erklärung. Gegebene ganze Zahlen addiren, heißt eine ihnen allen gleiche Zahl finden. Die gegebenen Zahlen heißen die Summanden, die zu findende Zahl heißt Summe.

Das Zeichen der Addition ist $+$ (plus oder mehr), das Zeichen der Gleichheit zweyer Zahlen ist $=$, z. B. $4 + 2 = 6$. Mit diesem Zeichen der Addition denkt man sich jede Zahl gesetzt, z. B. $3 = + 3$, oder als zu Null addirt, $3 = 0 + 3$.

§. 2. Aufgabe. Mehrere gegebene ganze Zahlen zu addiren.

Regel. Man addire die Zahlen der Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. Zu diesem Behufe schreibe man gleich bey dem Ansetzen der Zahlen ihre Ziffern so untereinander, wie sie sich ihrem Generalwerthe nach entsprechen, und mache unter die so angesetzten Summanden einen Strich, un-

ter welchem man dann die einzelnen Summen setzt. Hiebey ist noch zu merken, daß, wenn eine dieser einzelnen Summen (die letzte zur Linken ausgenommen) durch mehrere Ziffern ausgedrückt werden müßte, man nur die erste Ziffer zur Rechten hinschreibt, die durch die andern Ziffern aber ausgedrückten Zehner oder Hunderte u. s. f. sogleich zu den folgenden Reihen addirt, welche die Ziffern von jenem Generalwerthe enthalten.

Beyspiel 1. Man soll die Zahlen 12, 104 und 3 addiren. Man setzt demnach

	Hunderte +	Zehner +	Einer
	. . .	1	2
	1	0	4
	. . .	. . .	3
Summe.	1	1	9

Beysp. 2. Wenn die Zahlen 8475; 389; 8; 17347; 20 addirt werden sollten; so setzte man, wie folgt, die Ziffern untereinander:

	Zehnt. +	Taus. +	Hund. +	Zehn. +	Einer
	. . .	8	4	7	5
		. . .	3	8	9
			. . .	. . .	8
	1	7	3	4	7
	. . .	. . .	. . .	2	0
S.	1	15	10	21	29

Oder kurz:

	8475
	389
	8
	17347
	20
Summe	26239

Beweis. Daß diese gegebene Regel oder Auflösung richtig sey, oder daß man, wenn man nach ihr verfährt,

der Forderung in jedem Falle Genüge thue, ist daraus klar, weil man nach ihr alle einzelnen Theile der Summanden, nämlich alle Einer, Zehner u. s. w, folglich die Summanden selbst in einer einzigen Zahl zusammengenommen erhält; diese nach der Regel gefundene Zahl oder Summe ist daher den Summanden zusammengenommen gleich, was gefördert wurde (§. 1.)

§. 3. Probe. Zieht man jede Summande von der Summe, d. i. die einzelnen Theile des Ganzen von diesem ab: so bleibt, wenn richtig addirt wurde, nach Grundsatz 4. (§. 43. d. Einl.), nichts übrig, und umgekehrt: Bleibt bey diesem Abziehen nichts übrig, so ist richtig addirt worden.

Diese Probe ist also eine arithmetisch vollkommen wahre Probe.

§. 4. Zusatz 1. Man sieht leicht ein, daß die Anstellung dieser Probe, so richtig sie auch an und für sich ist, doch für den praktischen Rechner, welcher bey seinen Rechnungen von Wichtigkeit einer Probe bedarf, so gut, als völlig unbrauchbar ist.

Die beste Vorschrift für einen solchen ist daher, daß er, um sich über die Richtigkeit seiner oft aus langen Reihen aufgefundenen Summe zu beruhigen, die Summation so wiederhole, daß diese, wenn sie von unten nach oben, wie gewöhnlich, vollendet wurde, nun von oben nach unten vollbracht wird. Denn dadurch werden die Ziffern, bey deren Zahlen-Summation er sich etwa irrte, getrennt. Oder auch, man theile die Summanden, und addire dann die Summen der Theile.

§. 5. Zusatz 2. Aus demselben Grunde, wie vorher, hat man die sogenannte Neunerprobe aufgestellt. Sie besteht darin, daß man alle Ziffern aller Summanden, wie Ziffern der Einer, betrachtet, und dann bey dem Zusammenzählen dieser Einer die jedesmal erhaltenen 9 Einheiten wegwirft, die übriggebliebenen Einer aber,

oder die erhaltene Nulle, notirt. Ist nun die aufgefundene Summe die richtige: so muß durch dasselbe, auch bey der Summe angewendete, Verfahren derselbe Rest bleiben.

So bleibt im obigen Beisp. 1. aus den Summanden, wie aus der Summe 2, und im Beysp. 2 bleibt überall 4 übrig. Man zählt nämlich hiebey auf folgende Weise, indem man z. B. bey der ersten Summande 8475 anfängt: 8 und 1 ist 9, bleibt 3 aus 4; — 3 und 7 ist 10, davon 9 weg bleibt 1, — 1 und 5 ist 6, und dazu 3 (aus der zweyten Summande) ist 9, — 8 und dazu 1 aus der 3ten Summande bleibt hier 7; — 7 und 1 aus der 4ten Summande ist 8, dazu 1 aus 7 ist 9, bleibt aus 7 noch 6, dazu 3 hat man 9, — 7 und 2 aus 4 ist 9, bleibt 2; — 2 und 2 aus der letzten Summande ist 4, welche Zahl man sich bemerkt.

Eine kleine Uebung macht dieses Auffinden und Wegwerfen aller Neuner äußerst leicht und behende.

Aber man kann nicht geradezu umgekehrt schließen: Wenn beyde Reste gleich sind: so ist auch die Summe die richtig aufgefundene. Denn in dem Falle, daß man die eine einzelne Summe um 1 zu wenig, die andere einzelne Summe um 1 zuviel, z. B. statt 3 die Ziffer 4, und statt 6 die Ziffer 5 in der Summe 26239 angesetzt hätte, würde der Rest aus der Summe mit dem aus allen Summanden übereinkommen, und doch die Summe unrichtig seyn.

Beweis der Neunerprobe in Betreff der erstern Schließart. 1. Die Ziffern der Summanden wie Ziffern der Einer betrachten, ist nichts anders, als die Neuner aus den durch sie bezeichneten Zahlen wegwerfen: so ist nach Wegwerfung der Nenner 10 = 1; 100 = 1; 1000 = 1; oder 20 = 2; 300 = 3 u. s. w.

2. Wirft man daher auch noch aus den zusammengezählten Einern jede 9 Einheiten weg; so wirft man sowohl aus den Summanden, als aus der Summe durch das Verfahren bey der Neunerprobe alle in diesen Zahlen enthalte-

nen Neuner weg, d. i. man nimmt, wenn die Summe den Summanden zusammengenommen gleich ist, aus Gleichem Gleiches weg, folglich müssen die beyden Reste gleich seyn (nach Grunds. 2. §. 43. d. Einleitung).

Anmerkung 1. Der Beweis zeigt deutlich, warum die Neunerprobe, wie man sie der Kürze wegen, unserer gegebenen Vorschrift gemäß, wirklich anzustellen pflegt, trügerisch sey, oder warum man aus ihrem Zutreffen nicht so fort auf die Richtigkeit seines Rechnens schließen könne. Denn man wirft nur aus allen Summanden, wie auch aus der Summe, alle Neuner weg, ohne eigends zu bemerken, wieoft man die Neuner weggeworfen habe, wie dieses doch dem Beweise gemäß geschehen müßte. Denn nur nach Wegwerfung gleichvieler Neuner aus den Summanden sowohl, als aus der Summe können gleiche Reste bleiben.

Beyspiel. Es seyen die Zahlen 37 und 56 zu addiren; man findet 93, als die wahre Summe. Diese Summe kann nun aus wahrem Versehen, oder überhaupt mannigfaltig verändert werden, z. B. man kann statt 93 setzen 39, oder 84, oder 102 u. s. w. Bey allen diesen unrichtigen Summen trifft die Neunerprobe zu, indem der Rest aus jeder, wie aus den Summanden, nach Wegwerfung der Neuner die Zahl 3 ist. Allein würde man darauf achten, daß man die Zahl 9 aus 37 viermal, und aus 56 sechsmal wegwerfe; würde man dann auch die jedesmaligen Reste, hier 1 und 2, bemerken, und auch aus der Summe dieser Reste, wenn es möglich ist, die Neuner wegwerfen; würde man demnach bey unserm Beyspiele bemerken, daß man die Zahl 9 aus den Summanden zehnmal wegwerfe, und 3 zum Reste erhalte: so würde man bey jeder versetzten, oder falschen Summe, sogleich das Unrichtige derselben einsehen, sobald man auch bey ihr es versuchte, ob man aus ihr gleichvielmal die Zahl 9 wegwerfen könne, und denselben Rest erhalte. So kann man aus der Summe 39 die Zahl 9 nur 4mal,

aus 84 nur 9 mal, aber 11 mal aus 102 wegwerfen; es müssen also alle diese Summen falsch, und nur die einzige 93 muß die wahre seyn, nicht nur, weil nach Wegwerfung der Neuner der Rest 3 bleibt, wie in den Summanden, sondern weil man auch aus ihr die Zahl 9 nur 10 mal wegwerfen kann.

Diejenigen demnach, welche in ihren Lehrbüchern der Neunerprobe das Verdammuugsurtheil „sie ist trüglich, also auszumerzen" geradehin sprechen, sagen 1) etwas Wissenschaftlich-falsches, 2) in Beziehung auf den Begriff und das Bedürfniß einer Probe in der gemeinen Rechenkunst etwas durchaus Unzuläßiges, wobey ich mich auf das beziehe, was ich unten bey der Division über die Neunerprobe weiter bemerke.

Anmerk. 2. Mehrere ältere Mathematiker, wie der oben genannte Hudalrichus Regius, Clavius (nicht aber Gemma Frisius, nicht Peurbach) führen auch die Siebnerprobe an. Diese besteht darin, daß in jeder einzelnen Summande von der Linken zur Rechten die Zahl 7, oder ihr Vielfaches weggelassen, der über dieses Vielfache bleibende Rest wieder mit der nächsten Ziffer zusammengenommen, und aus der so entstehenden Zahl das Vielfache von 7 wieder weggelassen, und der letzte Unterschied endlich zur Seite bemerkt wird. In dem beygefügten Beyspiele

	7	5
710654	0	4
8907	3	7
56789	5	4
880	5	0
777230	6	0

läßt man in der ersten Summande die erste Zahl 7 weg, dann 7 aus 10, bleibt 3, dann aus 36 wird das Vielfache von 7, oder 35 weggelassen; der Rest 1 mit 5 giebt die Zahl 15, daraus 14 weggelassen, erhält man nochmals

14, daher hat man zur Seite 0 zu setzen. So mit den übrigen Summanden! Wenn man nun aus den rechts gesetzten Resten, wie bey der Neunerprobe, alle Siebner wegläßt; so muß der erhaltene Rest, hier 6, mit dem aus der Summe, auf dieselbe Art, wie aus den Summanden, aufgefundenen Reste zusammenstimmen

Wenn Clavius diese Probe, welche er künstlicher nennt, als die Neunerprobe, eben darum für weniger trüglich hält, als die letztere, warum empfahl er nicht lieber die ebenfalls künstliche Fünferprobe, welche ungleich leichter angestellt werden kann, als die Siebnerprobe? In unserem Beyspiele, wo die vorletzte Ziffer in der ersten Summande 5, in der zweyten 0, die letzte in der 4ten Summande, eben so in der Summe, 0 ist, weiß man sogleich die wahren Reste, so, daß man den Rest nur noch aus der 3ten Summande nach Art der Siebnerprobe, und dann aus den einzelnen rechts gesetzten Resten aufsuchen darf.

Zweyter Abschnitt.

Die Subtraction.

§. 6. Erklärung. Gegebene ganze Zahlen von einander abziehen, heißt eine Zahl finden, welche die Verschiedenheit der gegebenen Zahlen ihrer Quantität nach ausdrückt.

Die Zahl, von welcher eine andre abgezogen werden soll, welche man den Subtrahend nennt, heißt der Minuend, und die aufzufindende Zahl heißt Unterschied, oder Differenz, oder Rest.

Das Zeichen der Subtraction ist — (was man minus oder weniger ausspricht), welches vor dem Subtrahend gesetzt wird, z. B. Zwey von Drey abgezogen, giebt 1 zum Rest, würde, durch Zeichen ausgedrückt, so stehen: $3 - 2 = 1$.

§. 7. Zusatz. Der Begriff vom Abziehen zeigt klar, daß der Minuend, wenn er nicht dem Subtrahend gleich ist, immer die größere gegebene Zahl ist, daß folglich die Differenz die Bedeutung dieser Zahl erhält, wenn sie eine benannte ist. Bedeutete z. B. die vorige Zahl Drey 3 Gulden Schulden, und die Zahl Zwey 2 Gulden Vermögen, so würde der Unterschied = 1 einen Gulden Schulden bedeuten.

§. 8. Aufgabe 1. Eine gegebene ganze Zahl, deren Ziffern alle kleiner oder gleich groß sind, als die entsprechenden Ziffern einer andern gegebenen ganzen Zahl, von dieser abzuziehen.

Regel. Man suche den Unterschied zwischen den Einern, Zehnern u. s. w beyder gegebenen Zahlen.

Zum Behufe dieser Regel ist zu merken, daß man 1) den Subtrahend so unter den Minuend setzt, wie oben die einzelnen Summanden; 2) um jenen Unterschied zu finden, darf man nur zur kleineren Anzahl der Einer oder Zehner u. s. w. so viel Einheiten addiren, bis sie der entsprechenden Anzahl der Einer oder Zehner im Minuend gleich wird. Die Summe dieser addirten Einheiten ist die gesuchte einzelne Differenz.

Beyspiel. Es sey 23 von 168 abzuziehen. Man setze

$$\begin{array}{rr} & 168 \\ & 23 \\ \hline \text{Untersch.} & 145 \end{array}$$

Ich erhalte erstens die einzelne Differenz 5, weil 3 + 1 = 4; 4 + 1 = 5; 5 + 1 = 6; 6 + 1 = 7, und 7 + 1 = 8; oder 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8 ist, d. h. 5 E. zu 3 addirt werden müssen, um 8 Einer zu bekommen. Eben so ist 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6, d. h. 4 Einheiten der 1ten Ordnung müssen zu 6 Einheiten derselben Ordnung addirt werden, um dieselbe Anzahl Zehner des Minuends zu erhalten.

Beweis. Nach dieser Regel verfahren, erhält man den Unterschied zwischen allen einzelnen Theilen des Subtrahends und Minuends, also auch den Unterschied zwischen den gegebenen Zahlen selbst, den zu finden, gefordert wird.

§. 9. **Aufgabe 2. Eine gegebene ganze Zahl von einer andern abzuziehen, deren eine oder mehrere Ziffern kleiner sind, als die entsprechenden der vorigen Zahl.**

Regel. Man borge zu der kleineren Ziffer des Minuends, um abziehen zu können, von der nächstfolgenden bedeutenden Ziffer eine Einheit der nächsthöheren Ordnung, bezeichne die Ziffer, von der man borgte, mit einem Punkte, um nicht zu vergessen, daß man sie um eine Einheit ihrer Ordnung vermindert hat. Uebrigens verfährt man nach der Regel zur ersten Aufgabe.

Beyspiel. Es sey von 3428 die Zahl 2545 abzuziehen. Man setze, wie vorhin:

	̇3̇4̇28
	2545
Untersch.	883

Da man nämlich 4, d. i. 4 Zehner, nicht von 2, d. i. 2 Zehnern, abziehen kann, so borgt man von 4 im Minuende eine Einheit ihrer Ordnung, oder 100 = 10 Zehnern; diese zu 2 Zehnern addirt, kann man nun 4 Zehner von 12 Zehnern abziehen, oder man sagt nur kurz 4 von 12 bleibt 8, d. i. 8 Zehner u. s. w.

Beweis. Durch dieses Borgen wird die Quantität des Minuends nicht geändert; denn die genommene Einheit höherer Ordnung wird zugleich wieder, in eine ihr gleiche Anzahl Einheiten niederer Ordnung verwandelt, zu einer andern Ziffer des Minuends addirt. Wobey man also blos den Vortheil hat, ohne Mühe das Abziehen fortsetzen zu können.

§. 10. Zusatz 1. Man kann auch die Ziffer, von der man borgte, unverändert lassen, und die entsprechende Ziffer des Subtrahends um eine Einheit derselben Ordnung vermehren, was offenbar einerley mit dem vorigen Verfahren ist; so würde ich im vorigen Beyspiele sagen: 6 von 14, und 3 von 3, statt 5 von 13, und 2 von 2. Dadurch könnte man füglich die Punkte über den oberen Ziffern ersparen, indem diese Vermehrung unmittelbarer vorzunehmen ist, als die obige Verminderung, folglich nicht so leicht, als diese vergessen werden kann.

Auch könnte man die Ziffer des Subtrahends, welche kleiner ist, als die entsprechende im Minuende, blos von 10 abziehen, und dazu die Ziffer des Minuends addiren, um die einzelne Differenz zu haben. Um z. B. von 45 die Zahl 29 abzuziehen, könnte man sprechen: 9 von 10 bleibt 1, und 5 dazu bleibt 6; dann 3 von 4 bleibt 1; also die ganze Differenz = 16.

§. 11. Zusatz 2. Ich sagte bey der vorigen Regel: man borge von der nächstfolgenden bedeutenden Ziffer. Dieses bezieht sich nicht auf einen besondern Fall, sondern auf diejenigen Beyspiele über die vorige Aufgabe, wo im Minuende eine oder mehrere Nullen vorkommen, von welchen man folglich unmittelbar nichts borgen kann. Man entlehnt dann nur von der auf die Nullen unmittelbar folgenden Ziffer, indem man von den durch sie bezeichneten Einheiten einer gewissen Ordnung eine Einheit dieser Ordnung nimmt, welche man weiter, so wie es die Anzahl der Nullen fordert, in 9 Einheiten und eine Einheit der nächst niedern Ordnung zerlegt. Dieses Verfahren ist immer dasselbe, so weit es nothwendig ist.

Da nun nur die letzte Einheit der niedern Ordnung zur kleineren Ziffer von der nächst niedern Ordnung im Minuend geborgt wird: so sieht man ein, warum aus den Nullen des Minuends Neuner von gewissen Ordnungen werden, sobald man, wegen der kleineren Ziffer des Minuends, obiger Regel gemäß, hatte borgen müssen.

Beyspiel. Es sey von 3004 abzuziehen 278. Hier muß nun, um 8 von 4 abziehen zu können, eine Einheit von 3 entlehnt werden, und die Nullen werden durch folgende dargestellte Veränderung beyde zu 9. Es ist nämlich

$$3004 = \begin{cases} 3000 + 0 + 0 + 4 \\ 2000 + 1000 + 0 + 4 \\ 2000 + 900 + 100 + 4 \\ 2000 + 900 + 90 + 10 + 4 \\ \hline 2000 + 900 + 90 + 14 \end{cases}$$

$$\text{und } 278 = \ldots \quad 200 + 70 + 8$$

$$\text{Differenz} = 2000 + 700 + 20 + 6$$

Denselben Unterschied erhält man, wenn man jede Null als 9 betrachtet, und die auf die Nullen folgende Ziffer um 1 vermindert:

Nämlich	3004	Wo man spricht: 8 von 14 bleibt
	278	6, 7 von 9 bleibt 2, 2 von 9
Differenz =	2726	bleibt 7, 2 ist 2.

§. 12. Probe. Addirt man den Subtrahend (d. i. die vom Ganzen weggenommenen Theile) zur Differenz (d. i. zu den übriggebliebenen Theilen): so kömmt, wenn richtig subtrahirt worden, der Minuend (d. i. das Ganze) nach Grundsatz 5. (§. 43. d. Einl.) wieder zum Vorschein, und umgekehrt.

Diese Probe ist daher eine arithmetisch vollkommen richtige Probe, leicht anzuwenden, folglich die einzige, welcher der praktische Rechner bedarf.

Anmerkung. Eine an sich eben so richtige mathematische Probe besteht darin, daß man die gefundene Differenz vom Minuende abzöge, wodurch der gegebene Subtrahend als Rest erhalten werden müßte. So ist $12 - 8 = 4$, und $12 - 4 = 8$.

Allein die vorige Probe ist leichter, als diese, und als die Neunerprobe anzustellen, daher sind beyde unnöthig. Die letztere würde indessen so angestellt: man wirft alle Neuner aus dem Minuende weg, und bemerkt den Rest, welchen man ebenfalls erhalten muß, wenn man alle Neuner aus dem Subtrahende und der Differenz wegschafft.

Dritter Abschnitt.

Die Multiplikation.

§. 13. Erklärung. Gegebene ganze Zahlen miteinander multipliziren oder vervielfachen, heißt eine Zahl finden, welche eine der gegebenen Zahlen so oft zu sich addirt enthält, wie oft die Einheit in der andern gegebenen Zahl enthalten ist.

Die gegebenen Zahlen heißen die Faktoren, und die den ineinander multiplizirten Faktoren gleiche Zahl heißt das Produkt oder Faktum. Derjenige Faktor, welcher als der zu vervielfachende betrachtet wird, heißt auch der Multiplikand, der andere, nach dessen Gesetz die Vervielfachung geschehen soll, der Multiplikator. Dieser zeigt demnach an, das Wievielfache vom Multiplikand das Produkt sey. Dieses hat daher immer die Natur, oder den Namen des Multiplikands, aber der Multiplikator ist seiner Natur nach unbenannt.

Das Zeichen der Multiplikation ist $\times$, oder ein Punkt, z. B. 4×3, oder $4 \cdot 3$, d. i. 4 multiplizirt mit 3 (ductum in 3).

§. 14. Zusatz 1. Aus der vorigen Erklärung erhellt, warum man die Multiplikation kurz eine wiederholte Addition nennt. So ist z. B. $4 \times 3 = + 4 + 4 + 4 = 12$; oder auch $3 \cdot 4 = + 3 + 3 + 3 + 3 = 12$. Es ist nämlich in Ansehung der Quantität des zu findenden Produktes einerley, welchen Faktor man als Multiplikand,

oder als Multiplikator betrachten will; folglich einerley, welchen Faktor man nach dem Gesetze des andern wiederholt durch Addition setzt.

§. 15. Zusatz 2. Um dieses wiederholte Addiren zu erleichtern und zu beschleunigen, ist das sogenannte Einmal-Eins, oder der Pythagorische Rechentisch (abacus pythagoricus) erfunden, wo jedes Produkt aus je 2 einziffrigen Faktoren jedesmal in dem Quadrätchen enthalten ist, welches die zwey, den einen Faktor einschließenden, Linien mit den zwey anderen, den andern Faktor einschließenden, Linien bilden. Demnach werden alle besondern Fälle, die man durch die allgemeine Aufgabe: „einziffrige gegebene ganze Zahlen miteinander zu multipliziren" befassen kann, mittels dieses Einmal-Eins gelöst.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Wer dieses Einmal-Eins seinem Gedächtnisse wohl einprägt, bedarf weder zum Behufe der Multiplikation, noch der Division, eines andern künstlichen Mittels. Merkwürdig bleiben indessen immer Neper's Rechenstäbchen, wovon ich ein Schema beygefügt habe.

Der Gebrauch dieser Stäbchen ist dann vorzüglich, wenn beyde Faktoren vielziffrige Zahlen sind. Ich erläutere denselben weiter unten.

Neper's Rechenstäbchen.

A.

0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1
/0	1/8	1/6	1/4	1/2	1/0	/8	/6	/4	/2	2
/0	2/7	2/4	2/1	1/8	1/5	1/2	/9	/6	/3	3
/0	3/6	3/2	2/8	2/4	2/0	1/6	/2	/8	/4	4
/0	4/5	4/0	3/5	3/0	2/5	2/0	1/5	1/0	/5	5
/0	5/4	4/8	4/2	3/6	3/0	2/4	/8	1/2	/6	6
/0	6/3	5/6	4/9	4/2	3/5	2/8	2/1	1/4	/7	7
/0	7/2	6/4	5/6	4/8	4/0	3/2	2/4	1/6	/8	8
/0	8/1	7/2	6/3	5/4	4/5	3/6	2/7	1/8	/9	9

B.

Anmerkung. Denkt man sich einen jeden dieser 11 Theile, woraus das Ganze besteht, wie den Theil A B, auf einem gleich langen und breiten, oben mit einem Köpfchen versehenen, Bretchen mit Leim aufgetragen; verfertigt man sich dann mehrere dergleichen Stäbchen, wie A B, weil jede Ziffer, wie hier 5, im Multiplikand mehrmals vorkommen kann; paßt man endlich die 11 Stäbchen so in einer Rahme ein, daß einige nach Belieben herausgenommen, die übrigen aber, deren man sich gerade bedienen will, genau aneinander gerückt werden können: so hat man, statt des Rechentisches des Pythagoras, den von Neper erfundenen.

§. 16. Zusatz 3. Eine Zahl durch 1 multipliziren, heißt sie einmal durch Addition setzen. Dieses drückt aber schon jede Zahl an und für sich aus. Man kann daher jede Zahl als durch 1 multiplizirt betrachten; z. B. 3 = 3 × 1.

§. 17. Zusatz 4. Ist der eine Faktor eine Nulle: so ist auch das Produkt eine Nulle. Denn eine Zahl nullmal zu sich selbst addiren, heißt sie keinmal durch Addition setzen. Die Zahl verschwindet folglich nach §. 16. gänzlich. So ist 3 × 0, oder 0 × 3 = 0 + 0 + 0 = 0.

§. 18. Zusatz 5. Gleiches mit Gleichem multiplizirt, giebt gleiche Produkte (§. 43. der Einl. Grundſ. 1.).

§. 19. **Aufgabe 1. Gegebene Einheiten von gewissen Ordnungen miteinander zu multipliziren.**

Regel. Man füge der Ziffer 1 so viele Nullen, als in beyden Faktoren sind, zur Rechten bey.

Beyspiel. 100 × 10 = 1000; oder 1000 × 100 = 100000. Der **Beweis** erhellet aus §. 10. der Einleit.

§. 20. Zusatz. Sind daher einem oder beyden Faktoren, aus welchen Ziffern sie auch bestehen mögen, zur Rechten Nullen angehängt: so multiplizirt man nur die bedeutenden Ziffern miteinander, und dem Produkte fügt man zur Rechten soviel Nullen bey, als in den Faktoren gegeben sind. Z. B. 300 × 40 = 12000 u. s. w.

Denn auch hier zeigen die angehängten Nullen nur eine Steigerung des Generalwerthes des Produktes aus den bedeutenden Ziffern nach dem Gesetze der Einheit von derjenigen Ordnung an, welche die Summe der Ordnungen der Einheit in beyden Faktoren ist. So ist 300 × 40 = 3 . 100 × 4 . 10 = 3 × 4 . 1000 = 12 . 1000 = 12000.

§. 21. **Aufgabe 2. Das Produkt aus gegebenen Faktoren, als ganzen Zahlen, wovon entweder nur eine, oder alle mehrziffrig sind, zu finden.**

Regel. Man multiplizire, wenn nur 2 Faktoren gegeben sind, mit jeder Ziffer des als Multiplikators ange-

nommenen Faktors, mit der Ziffer der Einer angefangen, alle Ziffern des andern, als Multiplikand angenommenen, Faktors z. B. von der Rechten zur Linken.

Besteht der Multiplikator nur in einer Ziffer: so ist das erhaltene Hauptprodukt das gesuchte; besteht er aber aus mehreren Ziffern: so giebt erst die Summe der auf jene Art erhaltenen Hauptprodukte das gesuchte Produkt.

Wären aber mehrere Faktoren gegeben: so suchte man zuerst das Produkt aus zweyen, wie vorhin, und betrachtete dann dieses Produkt als einen Faktor, den man mit dem dritten Faktor multiplizirte u. s. f. Dieser Fall unterscheidet sich demnach nicht wesentlich von dem vorigen.

Beyspiel. Sollte 138 mit 4, oder nach dem Gesetze von 4 multiplizirt werden: so multiplizirte man mit 4 zuerst 8 Einheiten, dann 3 Zehner, dann 1 Hundert. Wäre der Multiplikator 24; so multiplizirte man, wie vorhin, 138 mit 4 Einheiten, dann auch mit 2 Zehner, wie die folgende Rechnung anzeigt:

$$138 = 100 + 30 + 8$$
$$\times\ 4 = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 4$$
$$\text{Produkt} = 400 + 120 + 32 = 552$$

$$\text{und } 138 = 100 + 30 + 8$$
$$\times\ 24 = \cdot\ \cdot\quad 20 + 4$$
$$\left.\begin{array}{r} 400 + 120 + 32 \\ 2000 + 600 + 160 \end{array}\right\} \text{Hauptprodukte.}$$
$$\text{Produkt } 2000 + 1000 + 280 + 32 = 3312.$$

Beweis. Verfährt man nach dieser Regel oder Auflösung: so erhält man alle Theile des Multiplikands nach dem Gesetze des Multiplikators im Produkte gesetzt, folglich eine Zahl, welche den ganzen Multiplikand so oft durch Addition gesetzt enthält, wie oft es die Ziffern der Einer und der Einheit jeder Ordnung anzeigen, was durch die Aufgabe gefordert wird.

§. 22. Zusatz 1. Um jenes Zerlegen der Faktoren in ihre Theile zu vermeiden, verfährt man in praktischen Rechnungen auf folgende, von dem vorigen Verfahren nach der Regel wesentlich nicht verschiedene, kurze Art: Hat man den Multiplikator, wie bey Summanden, gehörig unter den Multiplikand gesetzt: so schreibt man beym Multipliziren nach der Regel 1) nur die erste Ziffer jedes einzelnen Produktes, das durch 2 Ziffern ausgedrückt ist, (das letzte Produkt ausgenommen) an, die zweyte addirt man gleich zum folgenden einzelnen Produkte; 2) setzt man die erste Ziffer jedes folgenden Hauptproduktes unter die zweyte Ziffer des vorhergehenden Hauptproduktes, d. h. man rückt jene Ziffer um eine Stelle von der Rechten zur Linken hinein. Denn dadurch kommen die Ziffern der Hauptprodukte, ihren Ordnungen nach, so untereinander, daß man aus ihrer Addition leicht das gesuchte Produkt erhalten kann.

Man löst also obige Beyspiele kurz so:

	138		138
	4	und	24
Prod.	552		552
			276
		Prod.	3312

§. 23. Zusatz 2. Kommen Nullen zwischen den bedeutenden Ziffern des Multiplikators vor: so rückt man nur, statt mit denselben zu multipliziren, die erste Ziffer des folgenden Hauptproduktes um so viel Stellen, mehr eine, von der Rechten zur Linken herein, als Nullen da sind.

Denn da die aus der Multiplikation mit jeder Nulle erhaltenen Nullenreihen nach §. 17. nicht den besondern Werth der bedeutenden Ziffern der Hauptprodukte bey ihrer Addition, sondern nur ihren Generalwerth vermehren helfen, dieselbe Vermehrung aber auch durch das vorgeschriebene Verfahren erhalten wird: so ist dieses beym Rechnen seiner Kürze willen vorzuziehen.

Beyspiel. 34080 mit 10060 zu multipliziren:

Man setze:

```
  34080
  10060
 ------
  20448
 3408
-------
```

Produkt 342,844,800

Anmerkung 1. Man muß nicht gerade mit der ersten Ziffer zur Rechten, sondern man kann auch mit der ersten zur Linken im Multiplikator angefangen, alle Ziffern des Multiplikands von der Rechten zur Linken multipliziren. Dann aber wird die Aufeinanderfolge der Hauptprodukte die umgekehrte der vorigen, weswegen man nun zur Linken hineinrücken müßte, wie vorher zur Rechten; so ist z. B. $96 \times 23 = \left\{\begin{matrix} 192 \\ 288 \end{matrix}\right\} = 2208$.

Anmerkung 2. Der Gebrauch der Neper'schen Stäbchen erhellt aus folgendem Beyspiele: Sollte die Zahl 987 mit 76 multiplizirt werden: so rückte man die Stäbchen so zusammen, wie sie im Schema schon nebeneinander stehen; unmittelbar nach dem letzten Stäbchen zur Rechten, rückt man das allerletzte Stäbchen, das die 2 Ziffern des Multiplikators enthält. Man schreibt nun die der Ziffer 6 gegenüberstehenden Ziffern der drey Stäbchen so aus, daß man, von der Rechten angefangen, jede Ziffer im Dreyecke für sich, aber die Summen beyder Ziffern in der verschobenen vierseitigen Figur, nach den Additionsregeln setzt. Die erste Ziffer des ersten Hauptproduktes wäre demnach 2; die zweyte wegen $4 + 8 = 12$ wäre 2; die dritte, wegen $4 + 4 = 8$ und wegen 1 im Sinne, 9; die vierte 5; oder das erste Hauptprodukt $= 5922$; das zweyte aus der Ziffer 7 in alle Ziffern des Multiplikands besteht aus den auf vorige Art gefundenen Ziffern 6909; also ist das Produkt aus 987 in $76 = \left(\begin{matrix} 5922 \\ 6909 \end{matrix}\right) = 75012$.

§. 24. Probe 1. Dividirt man das Produkt durch den einen Faktor: so kömmt, wenn es das wahre Produkt ist, der andere Faktor wieder zum Vorschein; und umgekehrt.

Diese Probe ist also eine arithmetisch vollkommen wahre Probe.

Beweis. Wir setzen hier, was gleich nachher gezeigt wird, voraus, daß das Dividiren ein wiederholtes Subtrahiren sey, und daß die durch die Division aufgefundene Zahl, oder der Quotient, anzeige, wie oft der Divisor vom Dividend abgezogen werden könne.

Macht man nun das Produkt zum Dividend, und den einen gegebenen Faktor zum Divisor: so kann dieser gerade so oft vom Produkte abgezogen werden, als er in demselben durch Addition gesetzt wurde; dieß geschieht aber, wenn das Produkt das wahre ist, so oft, als es der andere Faktor anzeigt (§. 14.); also sind der Quotient und dieser andere Faktor eine und dieselbe Zahl.

§. 25. Probe 2. Die Neunerprobe. Daß die vorhergehende Probe für den praktischen Rechner zu weitläuftig und beschwerlich sey, sieht man leicht ein. Derselbe wendet daher lieber die schneller zum Ziele führende Neunerprobe an, ungeachtet diese vermöge der Art, wie man sie in schnelle Anwendung zu bringen pflegt, der vorigen Probe, was die innere Gewißheit angeht, nachsteht, wie wir oben in der Anmerk. 1. zu §. 5. deutlich gezeigt haben, und sogleich eigends bemerken werden.

Die Neunerprobe stellt man aber so an: Man multiplizirt die aus beyden gegebenen Faktoren, nach Wegwerfung der Neuner, wie oben bey der Addition, übriggebliebenen Ziffern der Einer mit einander. Ist nun das aufgefundene Produkt das wahre: so ist die, auch aus ihm nach Wegwerfung jeder 9 Einheiten übriggebliebene, Ziffer der Einer gleich dem vorhin erhaltenen neuen Faktum, als eine Summe bloßer Einheiten betrachtet; — aber nicht umge-

kehrt, d. i. man kann nicht aus dieser erhaltenen gleichen Ziffer der Einer (aus beyden Produkten) schließen, daß das aufgefundene Produkt das wahre sey; weil man zwey Fehler könnte begangen haben, welche sich in Ansehung der auf das Produkt angewandten Neunerprobe, wie oben §. 5. bey der Summe, gegeneinander aufheben könnten.

Beweis. Ist das aufgefundene Produkt das wahre, so ist es gleich den beyden Faktoren ineinander multiplizirt (§. 13); es geht daher nach derselben mit ihm, wie mit diesen Faktoren, vorgenommenen Veränderung nothwendig über in das neue aus den veränderten Faktoren erhaltene Produkt, als Summe bloser Einheiten betrachtet.

Daß diese gleiche Veränderung in der Wegwerfung aller Neuner aus den Faktoren, wie aus dem gefundenen Produkte bestehe, ist oben §. 5. bey der Addition erwiesen.

Beyspiel. Im Beyspiele des §. 23. ist aus dem Multiplikand, nach Wegwerfung aller Neuner, der Rest 6, und im Multiplikator der Rest 7; und $6 \times 7 = 42 = 4 + 2 = 6$, d. i. nach Wegwerfung der 9 Einheiten. Diese Zahl erhält man auch aus dem Produkte als Rest. Würde man aber statt der ersten Ziffer 3 zur Linken 4 und irgend eine andere Ziffer um 1 zu niedrig gesetzt haben: so würde derselbe Rest = 6 bleiben, und doch das Produkt nicht das wahre seyn.

Anmerkung. Wenn wir die Neunerprobe auch hier wieder mit voller mathematischer Gewißheit anwenden wollten: so müßten wir auf ähnliche Weise, wie oben bey der Addition, eigends darauf achten, wie oft 1) der Neuner in beyden Faktoren enthalten sey; 2) welches die Reste nach Wegwerfung aller Neuner aus den Faktoren seyen; 3) müßten wir die Anzahl der Neuner, welche der Multiplikand enthält, mit dem Multiplikator, die Anzahl Neuner des Multiplikators, mit dem Reste aus dem Multiplikand, und beyde Reste unter 2) miteinander multi-

plizlren, hieraus die Neuner wieder wegwerfen und den Rest bemerken. Wenn man dann diese 3 Summen von Neunern addirte: so müßte die so gefundene ganze Anzahl von Neunern auch im Produkte, das man hat suchen wollen, nebst demselben vorhin bemerkten Reste, enthalten seyn.

Beyspiel. Wenn man 25 mit 12 multiplizirt, so findet man die 2 wahren Hauptprodukte 50 und 25, die richtig addirt, das gesuchte Faktum 300 geben. Da nun der Multiplikand 25 die Zahl 9 2mal mit dem Reste 7, der Multiplikator aber die Zahl 9 1mal mit dem Reste 3 enthält; da ferner 2.12 = 24, dann 1.7 = 7 und 7.3 = 21 = 2.9 mit dem Reste 3 ist: so muß man den Neuner nicht nur 24 + 7 + 2 mal, d. i. 33 mal aus dem Faktum 300 wegwerfen können, sondern auch nach geschehener Wegwerfung denselben Rest 3 bekommen, wenn recht gerechnet ist, und umgekehrt.

Allein es ist leicht einzusehen, daß die Neunerprobe, auf diese Weise angestellt, durchaus nicht für den praktischen Rechner sey. Wir rathen daher einem jeden, welcher Rechnungen von Wichtigkeit zu machen hat, die Neunerprobe, wie wir sie oben angegeben haben, auch sogleich zur Prüfung eines jeden einzelnen Hauptproduktes, und zuletzt nochmals zur Prüfung des erhaltenen Faktums anzuwenden. Bey dem jedesmaligen Zutreffen der so mehrmals angewandten Neunerprobe kann sich der bedachtsame Rechner ganz über die Richtigkeit seiner Rechnung beruhigen.

Vierter Abschnitt.

Die Division.

§. 26. Erklärung. Eine Zahl durch die andere dividiren oder theilen, heißt eine Zahl finden, welche anzeigt, wie oft die zweyte Zahl in der ersten enthalten ist.

Die erste Zahl, welche getheilt werden soll, heißt der Dividend, die zweyte, durch welche die erste dividirt werden soll, der Divisor oder Theiler, und die zu findende dritte Zahl der Quotient (Quotus). *)

Das Zeichen der Division sind 2 Punkte untereinander (:) oder ein Strich zwischen Dividend und Divisor, wie $\frac{4}{2}$, d. i. 4 dividirt durch 2, oder 4:2; Letzteres setzt der praktische Rechner gewöhnlich auf diese Art: 4 | 2 / Quot., so, daß dann der gefundene Quotient unter den zweyten Strich zu stehen kommt.

§. 27. Zusatz 1. Da eine Zahl in der andern so oft enthalten ist, wie oft jene von dieser abgezogen werden kann: so kann man auch die Division eine wiederholte Subtraktion nennen. Der Quotient enthält demnach immer so viel Einheiten, wie oft dieses Wiederholen der Abziehung möglich ist. So kann z. B. 4 von 8 zweymal abgezogen werden, oder der Quotient aus der Divisiion der Zahl 8 durch 4 ist 2.

Auch kann man sagen, der Quotient zeige an, wievielmal kleiner der Divisor, als der Dividend, sey; so zeigt der vorige Quotient 2 an, daß der Divisor 4 2mal kleiner, als der Dividend 8 ist.

Hieraus folgt, daß der Quotient um so grösser seyn müsse, je grösser der Dividend und je kleiner der Divisor ist.

§. 28. Zusatz 2. Die Division ist demnach das Umgekehrte der Multiplikation, oder, wie man durch Multiplikation ein Produkt aus 2 Faktoren findet, so zerlegt man

---

*) Da wir hier nicht von Brüchen handeln, so wird der Dividend allzeit wie eine gleich große oder größere Zahl betrachtet, als der Divisor, wenn wir es auch nicht ausdrücklich anzeigen.

durch Division jede Zahl, als Produkt betrachtet, in ihre Faktoren, davon nur noch der andere Faktor als Quotient zu finden ist, indem man den Divisor als den einen schon gegebenen Faktor betrachtet.

Besteht daher der Dividend, als Produkt betrachtet, aus zwey ganzen Zahlen, als den Faktoren dieses Produktes: so ist diejenige ganze Zahl, welche mit dem Divisor multiplizirt, den Dividend vollständig giebt, der richtige Quotient. In diesem Falle heißt der Divisor das Maß des Dividends, das Dividiren Messen, und beyde Zahlen, sowohl der Divisor, als Quotient, heissen aliquote Theile vom Dividend, indem sowohl der (hier nach dem Gesetze des Divisors) wiederholte Quotient, als der (nach dem Gesetze des Quotienten) wiederholte Divisor als Erzeuger der zu dividirenden Zahl betrachtet wird Mißt z. B. 4 die Zahl 8, und der Quotient ist 2: so ist sowohl 2, als 4 ein aliquoter Theil von 8; denn $4 + 4 = 4 \times 2 = 8$; und $2 + 2 + 2 + 2 = 2 \times 4 = 8$.

Besteht aber der Dividend nicht aus 2 ganzen Zahlen, als seinen Faktoren, sondern nur aus einer ganzen Zahl, die hier als Divisor gegeben wird: so kann man denselben doch als ein solches Produkt betrachten, um eine solche ganze Zahl an der Stelle des Quotienten zu suchen, welche, mit dem Divisor multiplizirt, ein solches Produkt giebt, welches, wenn man zu ihm eine kleinere Zahl, als der Divisor ist, addirt, dem Dividenden gleich wird. Dieser zu addirende Theil ist der Rest, welcher durch Abziehen des vorigen Produktes vom Dividenden erhalten wird. — In diesem Falle nun sagt man: der Divisor messe nicht den Dividend, und er sey blos ein aliquanter Theil von ihm, d. i. ein solcher, durch dessen wiederholte Addition der Dividend nicht erzeugt wird. Nennt man z. B. die ganze Zahl 2 den Quotienten aus 8 durch 3 dividirt: so ist $8 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$. d. i. 2 als Rest muß noch zum Produkte 6 addirt werden, um dem Dividende 8 gleich zu seyn; 3 ist ein aliquan-

ter Theil von 8, und das Produkt 6 heißt das nächst kleinere Produkt, welches aus dem bestimmten Divisor, als einer ganzen Zahl, in eine andere ganze Zahl erhalten werden konnte.

§. 29. Zusatz 3. Es ist nun aus dem vorigen Zusatze 2. deutlich, daß alle eigentlichen Regeln der Division nur dazu anleiten sollen, eine solche ganze Zahl als Quotienten zu finden, welche mit dem Divisor multiplizirt, ein Produkt giebt, das entweder dem Dividend gleich, oder doch das nächst kleinere ist. So oft dieses der Fall ist, so oft ist auch der Quotient der wahre. Man vergleiche hiemit das, was unten im Beweise des §. 36. gesagt wird.

Hieraus ist weiter klar, daß der eigentliche Beweis der Richtigkeit der Divisionsregeln, wie die Probe selbst in dem Satze liege: „Der Quotient, als ganze Zahl, mit dem Divisor multiplizirt, giebt den Dividend entweder wieder ganz oder zunächst.“ Denn diese Probe, wie jener Beweis, gehen hier aus der Natur der Division, wie wir sie im Zusatze 2. darlegten, auf gleiche Art hervor. Auch mußte dieß so kommen, wenn sich die vier Stammspezies schließen sollten.

§. 30. Zusatz 4. Wird der Generalwerth des Dividends nach dem Gesetze der Einheit einer gewissen Ordnung gesteigert oder vermindert: so wird auch der Quotient bey demselben unveränderten Divisor nach demselben Gesetze gesteigert oder vermindert, weil er sonst, als Faktor betrachtet, durch den Divisor multiplizirt, den Dividend nicht herstellen würde. Ist z. B. der Quotient aus 4 durch 2 dividirt die Zahl 2; so ist der Quotient aus 4 $\times$ 100 oder 400, durch dasselbe 2 dividirt, die Zahl 2 $\times$ 100 $=$ 200.

§. 31. Zusatz 5. Werden aber der Dividend und der Divisor, ihrem Generalwerthe nach, gleich vielfach vermehrt oder vermindert: so bleibt der Quotient unverändert.

Denn da der Quotient und der Divisor überhaupt als Faktoren betrachtet werden können: so kann man sich auch den Quotienten im vorigen Zusatze §. 30. als Divisor gesetzt denken, wo folglich der vorige Divisor nun als Quotient unverändert bleibt. Z. B. ist der Quotient aus 4, durch 2 dividirt, die Zahl 2: so ist dieselbe Zahl auch der Quotient aus 400 durch 200 dividirt, und umgekehrt.

Ueberhaupt gehören zu der in §. 27. ausgedrückten Regel noch folgende zwey:

1) Je größer der Dividend ist bey unverändertem Divisor, desto größer ist der Quotient;

2) Je kleiner der Divisor ist bey unverändertem Dividende, desto größer ist der Quotient.

§. 32. Zusatz 6. Als Grundsatz der Division gilt nach Grundsatz 2. §. 43. der Einl. der Satz: „Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches."

§. 33. Zusatz 7. Eine Zahl, durch 1 dividirt giebt dieselbe Zahl zum Quotienten. Denn durch eine solche Division ist nur der Ursprung der Zahl aus der Einheit, oder das ursprüngliche Verhältniß jeder Zahl zur Einheit (§. 27. der Einl.) eigends dargestellt. Setze ich z. B. $\frac{4}{1}$ oder 4 : 1 : so ist 1 so oft in 4 enthalten, wie oft ich das 1 zu sich addiren muß, um die Zahl 4 zu erzeugen.

§. 34. Zusatz 8. Eine Zahl durch 0 dividirt, z. B. 4 : 0 giebt nicht wieder 0 zum Quotienten, wie dieß der Fall bey der Multiplikation war (§. 17.). Denn eine Zahl durch Null dividiren, heißt die Nulle wiederholt von der Zahl abziehen (§. 27.). Da nun die Nulle von der Zahl abgezogen, dieselbe Zahl jederzeit als Rest läßt, so oft ich auch dieses Abziehen wiederholen mag: so sieht man ein, daß in diesem Falle der Quotient eine Zahl wird, zu welcher man, so groß sie auch angenommen wird, immer wieder die Einheit addiren kann, sobald man sich 0 nochmals von der Zahl abgezogen denkt (§. 27.). Der Quotient wird

daher in diesem Falle eine Zahl, die, so groß man sie auch schon angenommen hat, immer noch vermehrt werden kann, d. i. eine Zahl, welche größer ist, als jede anzunehmende oder zu gebende Zahl, oder, mit einem andern Ausdrucke, eine unendlich große Zahl. Ist daher das Zeichen für diese ein liegender Achter: so kann man diesen Fall durch $\frac{a}{0} = \infty$ oder $\frac{1}{0} = \infty$, ausdrücken.

Anmerkung. Der Satz „jede Zahl durch Null dividirt, giebt zum Quotienten eine unendlich große Zahl," ist ganz den obigen aus der Natur der Division abgeleiteten, Regeln §. 31. gemäß, indem er die Wahrheit enthält, daß der Quotient unendlich groß werden müsse, wenn der Divisor der kleinste wird. Eben so umgekehrt: der Quotient wird der kleinste, oder Null, wenn der Divisor unendlich groß wird.

Da ferner die Division ihrer Natur nach ein Vergleichen zweyer Zahlen ist §. 27: so kann man auch sagen, daß z. B. der Ausdruck $\frac{1}{0} = \infty$ den Sinn habe, daß die Einheit (und so jede andere Zahl) in Vergleich mit Null unendlich groß sey. Stellt man sich einen auch noch so kleinen Bruch vor, und denkt denselben wiederholt zu sich selbst addirt: so sieht man ein, daß die daraus entstehende Summe bis zur Einheit, und jeder andern Zahl, anwachsen könne. Denkt man sich aber die Nulle noch so oft zu sich addirt; so erhellt, daß immer nur die Nulle wieder zur Summe herauskomme. Daß demnach jede andere Zahl unendlichmal größer, als die Nulle, seyn müsse.

Dieß denjenigen zur Beherzigung, welche aller ihrer Logik zum Hohne obigem Ausdrucke keinen Sinn abgewinnen können! Uebrigens erscheint hiebey jede Appellation an den gemeinen Menschenverstand als eine leidige Chikane.

§. 35. **Aufgabe 1. Eine gegebene ganze ein- oder zweyziffrige Zahl durch eine andere einziffrige Zahl zu dividiren, wenn der Quotient auch nur eine einziffrige Zahl seyn soll.**

Regel. Da man den gegebenen ein- oder zweyziffrigen Dividend als ein Produkt aus zwey einziffrigen Faktoren nach §. 28. betrachtet, die Produkte aber jener Art insgesammt im Einmal-Eins enthalten sind: so bedient man sich des letztern zur Auflösung der Aufgabe nach dieser Vorschrift: Man suche in der Produktenreihe, welche den gegebenen Divisor an der Spitze hat, z. B. von oben herab ein Produkt, (den Divisor selbst als ein solches betrachtet) welches dem Dividende entweder gleich ist, oder unter den Produkten jener Reihe am nächsten kömmt; dann steht diesem Produkte links gegenüber am äußersten Ende der Quotient. Findet man nicht genau denselben Dividend in der Produktenreihe, so zieht man das nächst kleinere Produkt von jenem ab, und bezeichnet den Rest mit R.

Beyspiel. Es sey 56 durch 8 zu dividiren. Man findet auf dem Rechentische des Pythagoras in der Columne des Divisors 8, von oben herab, dieselbe Zahl 56 am dritten Platze von unten herauf, und ihr am andern Ende der Reihe die Zahl 7 entsprechen, welche also der gesuchte Quotient ist. — Sollte 15 durch 8 dividirt werden; so wäre der Divisor selbst das nächst kleinere Produkt, und 1 der Quotient, und der Rest = 15 — 8 = 7. Man setzt dieses auf folgende Art:

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ 15 & \overline{} \\ \underline{8} & 1 \\ R.\ 7 & \end{array}$$

Beweis. Dieser ist im §. 29. enthalten.

Anmerkung. Man kann diese Aufgabe als die Hauptaufgabe über die Division ganzer Zahlen betrachten. Denn alle übrigen Aufgaben, welche noch hieher gehören, werden auf eine völlig ähnliche Art, wie die vorstehende, gelöst. Da nämlich das Einmal-Eins nur die Produkte aus einziffrigen Faktoren enthält: so gehen die besondern Regeln, die folgenden Aufgaben zu lösen, dahin, den mehr als zweyziffrigen Dividend und Divisor in solche Theile (wenn

gleich nicht ausdrücklich), zu zerlegen, daß denn doch mittels des Einmal-Eins die einzelnen Ziffern, welche den Quotienten als ganze Zahl ausdrücken, aufgefunden werden können. Die Behandlung der folgenden Aufgaben wird unsere Bemerkung bestätigen.

§. 36. **Aufgabe 2. Eine gegebene mehr als zweyziffrige ganze Zahl durch eine gegebene einziffrige ganze Zahl zu dividiren.**

Regel. Man bemerke mittels eines kleinen Striches diejenigen ersten Ziffern des Dividends zur Linken, welche eine gleich große oder größere Zahl bezeichnen, als der Divisor ist. Man verfahre dann ganz nach der vorigen Aufgabe, setze die gefundene ganze Zahl an die Stelle des Quotienten, und dann die nächstfolgende Ziffer des Dividends zum Reste, wenn ein solcher blieb. Im Dividende bemerkt man wieder durch einen Strich, welche seiner Ziffern überhaupt unter den zum Auffinden der vorigen Differenz gemachten Strich herabgesetzt worden sey, um nicht eine Ziffer doppelt, oder gar nicht herabzusetzen.

Ist in dem auf diese Art erhaltenen neuen Dividende der Divisor nicht enthalten (was im Allgemeinen zu bemerken ist), so setzt man der ersten ganzen Zahl an der Stelle des Quotienten zur Rechten 0 bey, und zu den vorigen Ziffern noch die nächstfolgende Ziffer des Dividends herab. In diesem, wie im umgekehrten, Falle verfährt man so lange nach der Auflösung des §. 35., bis nach Herabsetzung aller Ziffern des gegebenen Dividends entweder kein Rest, oder doch ein kleinerer, als der Divisor, bleibt.

Beyspiel. Es sey 43549 durch 5 zu dividiren. Man setze, wie folgt:

```
            |5                      |6
43,5,4,9    |----        20,7,6,    |----
40          |8709        18         |346
--                       --
 35                       27
 35                       24
 --                       --
  49                       36
  45                       36
  --                       --
R. 4                        0
```

Es ist nämlich 1) im Einmal-Eins das nächstniedrigere Produkt in der Reihe des Divisors 5 die Zahl 40 in Ansehung der Zahl 43 als Dividend betrachtet, und der andere Faktor 8; 2) zum Reste 3 die Ziffer 5 gesetzt, hat man den neuen Dividend, den man in der Produktenreihe der Zahl 5 vollständig findet; der Faktor ist 7. 3) Weil nun in der herabgesetzten Zahl 4 der Divisor nicht enthalten ist, so wird Null in der Quotientenstelle, und zu 4 wird die letzte Ziffer 9 des Dividends gesetzt; aus dieser letzten Zahl 49 findet man endlich den Quotienten 9, welcher mit 5 multiplizirt, ein Produkt giebt, das um 4 Einheiten kleiner ist, als der letzte Dividend. Der Quotient, als eine ganze Zahl, ist also 8709.

Beweis. Ist die Regel in Betreff der Aufgabe §. 35. wahr, so ist auch die eben gegebene Regel zur Lösung vorstehender Aufgabe wahr: denn was diese Regel Besonderes hat, besteht in der Vorschrift, das Verfahren nach der Regel des §. 35. zu wiederholen. Diese Wiederholung wird dadurch möglich, daß man den einzigen Dividend in mehrere Dividende zertheilt; welche Theilung, um kurz zu verfahren, nur nicht ausdrücklich dargestellt wird; daß sie aber gesetzmäßig geschehe, leuchtet auf folgende Art ein:

Man macht nach der Regel zum ersten Dividend 43 = 43000. Diesen durch 5 dividirt, erhält man nach §. 30. und mittels des Einmal-Eins den Quotienten 8000, und zum Rest die Zahl 3000, welcher im Beyspiele nur durch die Ziffer 3 ausgedrückt wurde. Zu diesem Rest wird nun die Ziffer der Hunderte, d. i. 6 = 500 gesetzt; man hat also 35 = 3500, d. i. zum neuen Dividende die Hunderte, indem man die von den 10tausenden übriggebliebenen Tausende zu den Hunderten nimmt. Nach §. 30. und mittels des Einmal-Eins erhält man aus diesem 2ten Dividende den Quotienten 700. Nimmt man nun die Ziffer der Zehner des Dividends, nämlich 4 = 40 als neuen Dividend: so sieht man, daß das 10fache von 5 ein höheres Produkt, als

40 sey, dieses wird durch 0, d. i. 0 Zehner im Quotienten ausgedrückt. Man nimmt daher diese Ziffer der Zehner mit der der Einheiten zusammen, oder man macht 49 zum neuen Dividend, woraus der Quotient = 9 Einheiten gefunden wird. Der ganze Quotient, als ganze Zahl, wird demnach = 8000 + 700 + 0 Zehner + 9 = 8709 gefunden.

Dieses Zertheilen des Dividends in einzelne Dividende liegt übrigens in der Natur der Sache selbst. Denn der Dividend, als Produkt betrachtet, wurde nach §. 23. auch nur durch die Zusammensetzung von Haupt- und einzelnen Produkten erzeugt. Diese Produkte bey der Division, als dem Umgekehrten der Multiplikation, wieder nachzubilden, lehret sowohl diese, als die folgende Divisionsregel. Hieraus sieht man ein, warum nach Abziehung dieser einzelnen nachgebildeten Produkte kein Rest mehr bleiben könne, wenn der Dividend ein wahres oder vollkommenes Produkt ist; warum aber, wenn er kein wahres Produkt, nothwendig ein Rest, und zwar ein kleinerer, als der Divisor, bleibe. Denn im entgegengesetzten Falle müßte noch ein, wenigstens dem Divisor gleiches, einzelnes Produkt aus dem Dividende weggenommen werden können; aber dann wäre die Nachbildung dieser Produkte, wie sie von der Regel vorgeschrieben wird, nicht vollendet gewesen. Bleibt aber Null oder ein solcher Rest nach vollendeter Division, so müssen die wahren Quotientenziffern aufgefunden worden seyn. Denn nur mittels ihrer konnten die nachgebildeten einzelnen Produkte aus dem Dividende abgezogen werden.

Anmerkung. Noch bequemer bedient man sich bey Divisionen, wo der Divisor eine einziffrige Zahl ist, der Neper'schen Stäbchen. Legt man z. B. das letzte Stäbchen, und das mit der ersten Ziffer 5 nebeneinander; so findet man am schnellsten alle Ziffern des Quotienten in den vorigen Beyspielen.

§. 37. Aufgabe 3. Eine gegebene mehrziffrige ganze Zahl durch eine andere mehrziffrige ganze Zahl zu dividiren.

Regel. Um hier ganz nach der vorigen Regel verfahren zu können, müßte man sich gleichsam ein besonderes Einmal-Eins in Betreff des gegebenen mehrziffrigen Divisors, d. i. eine Produktenreihe aus diesem in alle einziffrige ganze Zahlen entwerfen, in welcher jedesmal das dem einzelnen Dividende gleiche oder nächstkleinere Produkt, wie die an der Stelle des Quotienten zu setzende ganze Zahl sogleich erkannt werden könnte.

Beyspiel. Wäre der gegebene Divisor 24; so erhielte man folgende Produktenreihe, der Tarif genannt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
24;	48;	72;	96;	120;	144;	168;	192;	216.

Ungeachtet man sich nicht immer diese Reihe von 9 Produkten zu entwerfen hat, was aus der Anzahl von Ziffern des gegebenen Dividends im Vergleich mit der Anzahl der Ziffern des gegebenen Divisors zu beurtheilen ist: so ist doch dieses Verfahren lästig, und nur dann von Nutzen, wenn man dieselbe Zahl bey vielen Rechnungen als Divisor brauchen muß. Ich rathe daher, daß sich der Anfänger im Rechnen zuerst vorzüglich in der Auflösung der Beyspiele über die erste und zweyte Aufgabe übe, und dann in Ansehung der Beyspiele über diese dritte Aufgabe, sich blos des Kunstgriffes bediene, daß er bey dem wiederholten Dividiren fragt: wie oft die Zahl, welche durch die höchste Ziffer des Divisors ausgedrückt wird, in der Zahl, welche eben so durch die (eine oder mehrere) höchste Ziffer des Dividends angedeutet wird, enthalten sey. Mittels dieser Frage wird die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe auf die Auflösung der obern zweyten und der ersten zurückgeführt. Allein die auf jene Frage gleichsam als Antwort gefundene und an der Quotientenstelle zu setzende ganze Zahl ist zwar nie um 1 zu niedrig, wohl aber kann sie öfters um 1, seltener um 2 Einheiten zu hoch genommen seyn, weil bey der Multiplikation der übrigen Ziffern des Divisors mit der einzelnen Quotientenzahl, öfters eine oder mehrere im Sinne behaltenen Einheiten zu den ersten Ziffern des Divisors addirt werden müs-

sen, wodurch das letztere Produkt größer werden kann, als der einzelne Dividend.

Nach obiger Vorschrift verfahren, findet man daher die wahre Ziffer des Quotienten nur versuchsweise; allein dessen ungeachtet leichter, als nach der zuerst gegebenen Regel.

Beyspiel.

	24
898305	37429
72	
178	
168	
103	
96	
70	
48	
225	
216	
R. 9	

Um nämlich zu sehen, wieoft 24 in den einzelnen Dividenden 89, 178, 103 ꝛc. enthalten sey, spricht man: 2 geht in 8 höchstens 4mal, in 17 höchstens 8mal, und in 10 5mal ꝛc., wobey man aber leicht bemerkt, daß man jedesmal den so versuchsweise gefundenen, einzelnen Quotienten um Eins kleiner nehmen müsse, um den wahren Quotienten zu erhalten.

Wäre der Divisor 28, oder 29 gewesen: so hätte das versuchsweise Auffinden des Quotienten noch richtiger zum Ziele getroffen, wenn man jene erste Ziffer 2 und 1 erhöht gedacht, also gesprochen hätte: 3 in 8 geht sehr nahe 3mal, u. s. w. Hätte man eben so 1832 durch 288 zu dividiren; so spräche man, da die höchste Ziffer 2 näher die Zahl 300 als 200 ausdrückt, 3 geht in 18 höchstens 6mal, welche Zahl auch wirklich der richtige Quotient ist. Hätte ich aber gesagt: 2 geht in 18 9mal, so hätte mich erst eine 4fache Multiplikation des Divisors mit 9, dann mit 8, dann mit 7, und zuletzt mit 6 belehren müssen, daß der letzte Quotient der wahre sey.

Bedient man sich auch hier wieder der Neper'schen Stäbchen, indem man neben das letzte Stäbchen diejenigen legt, welche zu ihren obersten Endziffern die Ziffern des Di-

visors haben: so kann man nicht nur allein geschwind erfahren, ob nicht die angenommene Quotientenziffer um 1 zu hoch sey, sondern auch leicht das richtige Produkt aus dieser in den Divisor auffinden.

Beweis. Dieser ist von den Beweisen in den §§. 36. 35. nicht verschieden.

§. 38. Zusatz. Befindet sich eine gleiche Anzahl Nullen dem Dividende zur Rechten angehängt, wie dem Divisor: so kann man hier, wie dort, diese Nullen nach §. 31. wegløschen. Befinden sich aber alle Nullen dem Divisor angehängt: so kann man diese und auch eine gleiche Anzahl bedeutender Ziffer aus dem Dividende zur Rechten mittels eines Striches abschneiden, um auf diese Art die Division leichter und geschwinder zu vollenden.

Die abgeschnittenen bedeutenden Ziffern werden nach vollendeter Division als Rest gesetzt, oder dem erhaltenen Reste zur Rechten beygefügt.

Beyspiel.

```
                   |28|00
        28,9,7,|43 |------
         28        |103
        ---
          97
          84
          ---
     R.  1343
```

Anmerkung. Man kann das Dividiren etwas schneller vollenden, wenn man die einzelnen Produkte aus dem Divisor in den einzelnen gefundenen Quotienten sogleich gehörig abzieht, was so geschehen kann:

```
     21    |932
   7569,84 |----
           |8 . .
   1158 . .
```

Man sagt nämlich 9: in 75 geht 8mal, und setzt 8 im Quotienten. Dann 2mal 8 ist 16, und 16 von 19 bleibt 3, was unter 9 geschrieben wird; daß man aber, um abziehen zu können, entlehnte, kann über der Ziffer 6 bemerkt werden. Weiter 3mal 8 ist 24, aber weil man 1 entlehnt hatte, spreche man nun 25 von 26 bleibt 1.

Da man hiebey 2 entlehnte; so spreche man bey dem letzten Abziehen statt 72 nun 74 von 75 bleibt 1. So fährt man fort, indem man die nächste Ziffer 8 zum Reste setzt.

Ein praktischer Vortheil, besonders wenn man es mit großen Zahlen zu thun hat, besteht auch darin, daß man soviele letzten Ziffern weniger eine, aus dem Dividende zur Rechten wegläßt, wieviele Ziffern der Divisor enthält. Die erhaltenen Reste werden aber durch den jedesmal um eine Ziffer zur Rechten verminderten Divisor dividirt. Zwar erhält man den Quotienten, auf diese Art gesucht, nicht ganz genau, aber der Fehler übersteigt nie die Einheit. Man soll z. B. 8789236487 durch 64423 dividiren. Man lasse die Ziffern 6487 weg; man findet den Quotienten 13, der Rest aber ist 41424, diesen durch 6442 dividirt, ist der Quotient = 6, und der Rest = 2772. Diesen durch 644 dividirt, hat man 4 und den Rest 196. Diesen wieder durch 64 und den neuen Rest 4 durch 6 dividirt findet man die 2 Quotientenziffern 3, 0, so daß der so gefundene ganze Quotient 136430 ist, welcher vom wahren nur um den Bruch $\frac{6527}{64423}$ abweicht.

Will man auf gleiche Weise auch 1611527 durch 64524 dividiren, so muß man, weil 161 durch 64524 zu dividiren wäre, sogleich die 3 letzten Ziffern des Divisors weglassen, oder 161 durch 64 dividiren; man findet als Quotient die Zahl 2 und den Rest 33, welchen durch 6 (indem man 4 in 64 wegläßt) dividirt den Quotienten 5 giebt. Der ganze Quotient ist also 25, der noch nicht um Eins gegen den ganz genauen Quotienten zu groß ist.

Hiebey ist zu bemerken, daß, wenn die wegzulassende Ziffer sowohl im Dividend, als im Divisor größer ist, als 5, man um genauer zu verfahren, die nächste noch beybehaltene Ziffer um 1 vermehren müsse. Wäre z. B. 8657627 durch 1937 zu dividiren; so dividirte man dadurch zuerst 8658, dann die Reste durch 199 und 20.

§. 39. Probe. Die eigentliche vollkommen richtige Probe ist im §. 29. ausgedrückt.

Wollte man auch hier wieder der Kürze willen die Neunerprobe anwenden, so stellte man diese, nachdem man, wenn ein Rest, der nicht ein Neuner ist, blieb, diesen Rest vom Dividende abgezogen hat, auf gleiche Art, wie im §. 25. gelehrt wurde, an. Es ist dieses aus §. 28. klar.

Mit dem Reste kann man auch so verfahren: nachdem man aus dem Divisor und Quotienten die Neuner weggeworfen, und die erhaltenen Reste (1 und 4 im letzten Beyspiele) miteinander multiplizirt, und auch aus diesem Produkte alle Neuner, wenn es möglich ist, weggeworfen hat: so addirt man den auf diese Weise erhaltenen Rest, hier 4, zu dem aus der Division gebliebenen Reste, hier 1343, und bemerkt den aus dieser Summe 1347 nach Wegwerfung der Neuner gefundenen Rest 6. Derselbe Rest muß nun nach Wegwerfung aller Neuner aus dem Dividende bleiben. Denn das Produkt aus dem Quotienten in den Divisor + dem Reste aus der Division ist gleich dem Dividende.

Anmerkung 1. Daß jene oben bey der Addition und Multiplikation bemerkte umgekehrte Schließart auch hier bey der Division an und für sich nicht angehe, ist leicht einzusehen.

Allein wegen dieser Unvollkommenheit die Neunerprobe aus der Ziffernrechnung verbannt haben wollen, hieße die Natur und das Bedürfniß einer Probe, verkennen. Denn auch die vollkommen richtigste Probe giebt uns keine Gewißheit, sondern lediglich Wahrscheinlichkeit, d. i. eine solche Ueberzeugung, bey welcher man sich über die Richtigkeit der aufgefundenen Zahl beruhigt. Hievon überzeugt man sich am besten, wenn man überlegt, daß man z. B. über ein berechnetes Beyspiel aus der Multiplikation die Probe durch Division, und so umgekehrt — anstellen soll; daß man demnach von diesen beyden Proben

ewig im Kreise herumgeführt würde, wenn man nicht selbst diesen wechselweise immer wiederkehrenden Operationen dadurch ein Ende machte, daß man sich über die Richtigkeit der Rechnung beruhigte. Diese Beruhigung tritt jedesmal um so früher ein, je bestimmter man sich bewußt ist, daß man fertig und ziemlich fehlerfrey rechne. Das heißt: die Ueberzeugung von der Richtigkeit der Rechnung richtet sich ihrem Grade nach nicht nach innerer Gewißheit der gebrauchten Probe, sondern nach dem Grade des Bewußtseyns, daß man fertig und richtig rechne. Wer nun dieses Bewußtseyn hat, wird sich bey Anstellung der Neunerprobe eben so fest von der Richtigkeit der aufgefundenen Zahl überzeugen, als bey der Anstellung irgend einer andern Probe; indem er sich bewußt ist, daß er weder einen so groben Fehler, wie die Versetzung der Ziffern in der aufgesuchten Zahl, weder zwey Fehler, und zwar gerade zwey solche, die sich bey Anstellung der Neunerprobe verhüllen, wenigstens äußerst selten bey seinen Rechnungen begehe.

Zweytens bedarf der Anstellung der Probe nur derjenige, welcher Rechnungen von Wichtigkeit zu machen hat. Aber gerade für einen solchen, welcher sich diesen Rechnungen unterziehen kann, ist diejenige Probe, welche ihn am geschwindesten zur Bestärkung seiner Ueberzeugung, richtig gerechnet zu haben, oder zur Beruhigung über die Richtigkeit seiner Rechnung führt, die willkommenste.

Anmerkung 2. Wie man mit dem bey der Division erhaltenen Reste verfahren solle, kömmt unten bey den Brüchen (§. 74.), vorzüglich bey der Lehre vom Gebrauche der Dezimalbrüche im §. 113. vor.

Anmerkung 3. Die Art, wie die Alten die Division anstellten, und die man noch gegenwärtig bisweilen in Uebung findet, will ich kurz am folgenden Beyspiele zeigen. Man will 1832487 durch 469 dividiren. Man setzt:

42
685
1832487 (3
469

Dann erforscht man genau, wieoft 469 in 1832 enthalten ist; der Quotient 3 wird hinter den Bogen geschrieben. Nun spricht man: 3mal 4 ist 12, und 2 von 8 bleibt 6, (welche Ziffer man über 8 setzt, indem man zugleich 8 und 4 durchstreicht;) und 1 von 1 geht auf; man durchstreicht 1. Dann spricht man 3mal 6 ist 18, was man von 63 so abzieht: 8 von 13 bleibt 5 (welche Ziffer über 3 gesetzt wird, indem man zugleich diese 3 und auch 6 im Divisor durchstreicht) und 1 von 5 bleibt 4, was über 6, dieses durchstrichen, gesetzt wird. Endlich spricht man 3mal 9 ist 27, durchstreicht 9, und sagt: 7 von 12 bleibt 5, was über das durchstrichene 2 gesetzt wird, und 2 von 4 bleibt 2, was man über das durchstrichene 5 setzt. Dieß die erste Operation! Der Dividend ist noch 425487.

Man rückt nun jede Ziffer des Divisors um eine Stelle weiter gegen die Rechte; das Beyspiel steht dann so:

1
63
421
6553
1832487 (390
46999
466
4

Da nun 4 in 42 9mal enthalten ist, und man durch leichtes Nachrechnen findet, daß 9 der wahre Quotient sey; so schreibt man diese Ziffer neben 3 im Bogen, und spricht 4mal 9 ist 36 und 6 von 12 (statt 2) bleibt 6 (was man über 2 setzt, indem man dieses 2 und 4 im Divisor durchstreicht,) und 3 von 3 geht auf; man durchstreicht 4. Eben so 6mal 9 ist 54 und 4 von 5 bleibt 1 (was man über 5 setzt, indem man dieses und 6 im Divisor durchstreicht,) und 5 von 6 bleibt 1, was man über das durchstrichene 6 setzt. Endlich 9mal 9 ist 81 (9 durchstrichen) und 1 von 4 bleibt 3 (welche Ziffer über die durchstrichene 4 gesetzt wird) und 8 von 11 bleibt 3 (was man über 1 setzt, welches man, sowie das höchste 1, durchstreicht). Dieß die 2te Operation! Der fernere Dividend ist 5387.

Man setzt nun abermals den Divisor so, wie die undurchstrichenen Ziffern zeigen, und nach 9 im Bogen setzt man 0, weil 4 in der obenstehenden Zahl 3 nicht enthalten ist. Man durchstreicht nun die Ziffern des Divisors, und rückt sie aufs neue so, wie das Schema weiter zeigt, wodurch das Beyspiel komplet dargestellt wird:

```
   1
   631
  42150
 655364
1832487(3907
 469999
  4666
   44
```

Indem man nun wie vorhin verfährt, findet man die letzte Quotientenziffer 7 und den Rest 104 aus der Division.

Man sieht leicht ein, daß diese Art, die Division zu vollbringen, darum besonders der unsrigen weit nachstehe, weil sobald ein Fehler vorfällt, das ganze Beyspiel von vorne an neu berechnet werden muß, indem man die Stelle, wo man entweder beym Multipliziren oder Subtrahiren einen Fehler begieng, nur äußerst schwer entdecken kann. Zugleich fällt hiebey die leichte Anstellung der jedesmaligen Probe über alle einzelne Multiplikationen und Subtraktionen weg, welche Probe man bey wichtigen Rechnungen und großen Beyspielen nie unterlassen sollte. Denn sonst wird man leicht in die Nothwendigkeit gesetzt, solche Beyspiele 2 — 3mal nachzurechnen, um sich zu überzeugen, nicht geirrt zu haben.

Zusatz in Betreff der Division, als Messung betrachtet.

---

§. 40. Erklärung. Das gemeinschaftliche Maß zweyer oder mehrerer Zahlen heißt die Zahl, durch welche jene genau getheilt werden können (§. 28.).

§. 41. Erklärung. Das gemeinschaftlich größte Maß ist diejenige Zahl, durch welche andere Zahlen am genauesten, d. i. so getheilt werden können, daß jedesmal der kleinstmögliche Quotient zum Vorschein kömmt.

Beyspiel. Die Zahlen 4; 12; 24 können durch 2 gemessen werden, und die Quotienten sind 2, 6, 12; dividirt man jene Zahlen durch 4, so erhält man die kleinsten Quotienten 1, 3, 6, indem es, ausser der Einheit, keine Zahl mehr giebt, welche diese Quotienten nochmals, folglich die gegebene Zahlen noch genauer messe. Die Zahl 2 ist also hier das gemeinschaftliche — aber 4 das gemeinschaftlich größte Maß.

§. 42. Erklärung. Zahlen, wie 1; 3; 6, welche ausser der Einheit, keine Zahl zum gemeinsamen Maß haben, heißen relative Stamm- oder Primzahlen (§. 27. der Einleit.), ungeachtet einige dieser unter sich verglichenen Anzahlen, wie hier 6, an und für sich zusammengesetzte Zahlen seyn können. Vergleicht man eben so die zusammengesetzten Zahlen, oder die Zahlen als Produkte, so heißen diejenigen Zahlen die gleichvielfach zusammengesetzten, welche dieselbe Zahl zum gemeinschaftlichen Maß, oder Faktor haben. So sind die Zahlen 4; 12; 24, oder 2, 6, 12 die gleichvielfach zusammengesetzten von 1; 3; 6, welche in Beziehung auf jene auch kurz die einfachen Zahlen heißen. Aber auch die Zahlen 2; 6; 12 kann man, in Beziehung auf 4, 12, 24, die einfachen Zahlen von diesen, als den Gleichvielfachen (hier gleichzweyfachen) von jenen, nennen.

§. 43. Lehrsatz. Die gleichvielfachen Zahlen geben denselben Quotienten, als ihre einfachen Zahlen, und umgekehrt.

Beweis. Aus den Regeln im §. 27. und §. 31. sieht man deutlich ein, daß die Größe des Quotienten abhänge von der Größe des Dividends und des Divisors, daß demnach bey z. B. 3facher Vermehrung des Dividends, aber

bey ungeändertem Divisor der Quotient auch dreymal größer werden müsse, als vorher. Dieser wird aber im Gegentheile um das 3fache kleiner, wenn man den Divisor bey ungeändertem Dividende um das 3fache vermehren würde. Der Quotient muß demnach offenbar ungeändert derselbe bleiben, wenn man den Dividend und den Divisor zugleich um das dreyfache vermehrt, indem sich nun die Vergrößerung und die ebenso vielfache Verkleinerung des Quotienten gegeneinander aufheben.

Dieselbe Wahrheit liegt schon in dem aus den Begriffen von Multiplikation und Division fließenden Satze, daß eine jede Zahl durch sich selbst dividirt, die Einheit zum Quotienten giebt. Es ist nämlich jede Zahl das Vielfache der Einheit, diese als das Einfache betrachtet. So ist $4 : 4 = \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{1}{1} = 1$. Eben so ist $\frac{24}{12} = \frac{12 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{12}{6} = 2$; oder $\frac{12}{6} = \frac{6 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{6}{3} = 2$.

§ 44. Zusatz. Es ist folglich die Division einfacher Zahlen nichts, als ein kürzerer Ausdruck für die Division ihrer Gleichvielfachen: so ist $\frac{6}{3}$ nur der kürzere Ausdruck für $\frac{12}{6}$. Dividirt man daher eine Primzahl durch die andere: so hat man eben dadurch schon den kürzesten Ausdruck. Wenn man demnach eine Division möglichst abkürzen will; so löst man sowohl den Dividend, als Divisor, wenn diese zusammengesetzte Zahlen sind (§. 24.), in ihre zunächst bekannten Faktoren, und diese nach und nach in Primzahlen auf, und läßt dann aus Dividend und Divisor eben dieselben Primzahlen weg.

Beyspiel. Man habe 72 durch 12 zu dividiren; nun ist $72 = 8.9 = 2.2\ 2.3.3$, und $12 = 3.2.2$, beyde Zahlen haben also die Primzahlen 2, 2, 3 gemein, diese also weggelassen, hat man $\frac{72}{12} = 2.3 = 6$, als Quotienten.

Es ist allerdings nützlich, wenn sich der Anfänger in dergleichen Resolutionen der Zahlen in ihre Faktoren übt. Allein bey größeren Zahlen geht dieß Resolviren nicht so leicht. In diesem Falle muß man durch einzelne versuchte Divisionen die gegebene Zahl in kleinere Faktoren auflösen. Z. B. 336 durch 24 zu dividiren: man versuche, ob nicht 8 ein Maß von 336 sey; man findet den Quotienten 42; also $336 = 42 . 8 = 7.6.8 = 7.2.3.2.2.2$; nun ist auch $24 = 4.6 = 2.2.3.2$. mithin ist $\frac{336}{24} = 7.2 = 14$.

Zum Behufe dieser Abkürzungsmethode dient die Auflösung der folgenden Aufgabe:

§. 45. Aufgabe. 1) Das gemeinschaftliche, 2) das gemeinschaftlich größte Maß zweyer Zahlen zu finden.

Auflösung. Zur Auffindung des gemeinschaftlichen Maßes zweyer Zahlen dienen folgende praktische Vorschriften:

2 ist das Maß einer Zahl, wenn die letzte Ziffer 0, 2, 4, 6, 8 ist;

3 oder 9 . . . ., wenn die Quersumme der Ziffern durch 3 oder 9 aufgeht, wie in 246, oder 9657.

4 . . . ., wenn die beyden letzten Ziffern durch 4 aufgehen, wie in 3516, oder 3124;

5 . . . ., wenn die letzte Ziffer 0, oder 5 ist;

8 . . . ., wenn die 3 letzten Ziffern durch 8 aufgehen, wie in 4897328, und 3009136.

Das gemeinschaftlich größte Maß aber findet man, wenn man die größere Zahl durch die kleinere dividirt; dann den vorigen Divisor durch den erhaltenen Rest u. s. w. auf gleiche Weise immer fort dividirt, bis entweder die Division aufgeht, oder 1 als Rest bleibt. In jenem Falle ist der letzte

Divisor das gemeinschaftlich größte Maß, in diesem Falle findet dieses Maß nicht statt. Um z. B. das gemeinschaftlich größte Maß der Zahlen 12 und 9464 zu finden, dividire man diese Zahl durch 12; man erhält den Rest 8. Dividirt man durch diesen Rest den vorigen Divisor 12, und durch den neuen Rest 4 den vorigen Divisor 8; so sieht man, daß eben dieser letzte Divisor 4 das gesuchte Maß ist, weil er in 8 aufgeht.

Der Beweis über die Richtigkeit dieses Verfahrens wird in der Buchstabenrechnung auf die leichteste Art geführt.

Man kann auch die Aufgabe umkehren, und folgende setzen:

§. 46. **Aufgabe.** Man soll für mehrere gegebene Zahlen, welche nicht lauter relative Primzahlen (§. 42.) sind, den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend suchen.

Auflösung 1. Da die gegebenen Zahlen, welche man als Divisoren betrachtet, Maße des gesuchten gemeinschaftlichen Dividends seyn sollen; da demnach dieser Dividend nicht nur alle verschiedenen, einfachen Faktoren jener gegebenen Zahlen, sondern auch das höchste Produkt enthalten muß, welches in einem und demselben gegebenen Divisor aus der Multiplikation derselben Primzahl mit sich selbst zum Vorschein kömmt: so sieht man leicht ein, wie man sich diesen kleinsten gemeinschaftlichen Dividend verschaffen müsse.

Man zerfälle nämlich nach §. 44. die gegebenen Zahlen oder Divisoren in ihre Faktoren, und multiplizire die in ihnen erkannten verschiedenen Faktoren mit dem höchsten Produkte, welches in demselben Divisor dieselbe Primzahl giebt.

Beyspiel. Man sucht für die Zahlen 8, 5, 6, 7, 9 den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend. Statt jener Zahlen hat man durch Zerfällung in Primzahlen folgende: 2.2.2, 5, 2.3, 7, 3.3. Die verschiedenen Faktoren sind 2, 5,

3, 7; aber dieselbe Zahl 2 und 3 kömmt mehrmals vor, und zwar das höchste Produkt von 2 in der ersten Zahl 8, das der andern Zahl 3 in 9. Demnach ist der kleinste gemeinschaftliche Dividend $= 8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 2520$. Will man die Quotienten finden, so darf man nur gegen jeden Divisor die ihn bildenden einfachen Faktoren aus dem Dividende weglassen; so ist $\frac{2520}{8} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{8} = 5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$; $\frac{2520}{5} = 8 \cdot 7 \cdot 9$ rc.

Auflösung 2. Für den Fall, wenn kleinere Divisoren gegeben sind, welche in den gegebenen größeren genau enthalten sind. In diesem Falle lasse man jene kleinere Zahlen geradezu weg, und verfahre, wie vorher.

Beyspiel. Es sey zu den Zahlen 24, 9, 6, 3, 15, 25 der kleinste gemeinschaftliche Dividend zu suchen. Man lasse die Zahl 3 weg, und setze: 3.2.2.2, 3.3, 2.3, 5.3, 5.5. Die verschiedenen gemeinschaftlichen Faktoren sind 2, 3, 5, daher der gemeinschaftliche kleinste Dividend $= 2 . 2 . 2 . 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 1800$.

Auflösung 3. Um sich das Zerfällen der Divisoren in ihre Primzahlen zu ersparen, kann man auch auf folgende Weise verfahren:

1) Man lasse die kleineren Zahlen, welche Maße der größeren gegebenen Divisoren sind, nach Aufl. 2. weg;

2) Man kürze mehrere der gegebenen Zahlen durch ein gemeinschaftliches Maß ab;

3) Eben so kürze man die neuen Quotienten sowohl unter einander, als mit den gegebenen Zahlen ab.

Die auf diese Art als gemeinschaftliche Maße gewählten Zahlen, welche unverändert bleiben müssen, dann die Quotienten und Divisoren, welche zuletzt als relative Primzahlen übrig bleiben, bilden, miteinander multiplizirt, den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend, welcher gesucht wurde.

Beyspiel. Die gegebenen Divisoren seyen 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 36, 48. Weil nun 6 in 12, 8 in 16, 9 in 36, 10 in 20, 12 in 24, 24 in 48 genau aufgehen: so kommen nur noch folgende Divisoren 7, 15, 20, 36, 48 in Betrachtung.

Nun haben die Zahlen 15 und 20 die Primzahl 5 zum gemeinschaftlichen Maße, und die neuen Quotienten sind 3 und 4.

Der letzte Quotient 4 ist wieder gemeinschaftliches Maß von sich selbst und von 48; die neuen Quotienten sind 1 und 12.

Die Zahl 36 und der obige Quotient 3 haben wieder die Zahl 3 zum gemeinschaftlichen Maße, die neuen Quotienten sind 12 und 1.

Dieser neue Quotient 12 und der vorige Quotient 12 haben dieselbe Zahl 12 zum gemeinschaftlichen Maße.

Die als gemeinschaftliche Maße gewählten Zahlen sind also 5, 4, 3, 12, diese bilden daher mit dem noch übrigen Divisor 7 das Produkt 5040, welches der kleinste gemeinschaftliche Dividend ist.

Allgemeine Anmerkung 1.

Verständige Leser werden nach dieser Behandlung der 4 Spezies die Reflexion von selbst anstellen, wie sich diese vier Stammrechnungsarten nacheinander und auseinander entwickeln. Die erste Spezies ist nothwendig Addition, weil wir dadurch allererst die Zahl überhaupt erzeugt denken, oder weil bey allem menschlichen Vorstellen die Synthesis das Erste ist. Wie durch diese die Analysis, so wird durch die Addition erst die Subtraktion möglich (man sehe auch §. 8.). Das Multipliziren ist ferner nichts, als ein Addiren einer Zahl nach dem Gesetze derselben oder einer andern Zahl. Daher sind auch die Multiplikationsregeln

nur Anweisungen, wie man sich der allgemeinen Additionsregeln kurz und schnell bey dem wiederholten Addiren der Kenntniß des Ziffernwerthes gemäß bedienen solle. Die Regeln der Division, als des Umgekehrten der Multiplikation, werden nicht sowohl durch die Subtraktionsregeln, als zunächst durch die Regeln der Multiplikation möglich gemacht, was aus dem im Beweise §. 36. Gesagten deutlich erhellt.

Anmerkung 2.

Rechnen heißt im Lateinischen calculare, calculum instituere (ratiocinari), weil die Römer (vielleicht noch ältere Völker) mit Steinchen (calculis), womit sie auf einem Rechenbrette (abaco, — tabula) die Einheiten der verschiedenen Ordnungen bezeichneten, zu rechnen pflegten. Die Stelle:

Pueri, magnis a centurionibus orti
Laevo suspensi loculos tabulamque lacerto.
Hor. serm. lib. 6 v. 73.

scheint auf Knaben, welche in die Rechenstunde gehen, demnach Tafeln und Behältnisse (loculos) für die Steinchen mit sich trugen, zu sprechen. Auch die Sinesen, so wie die Russen bedienen sich des Rechenbrettes. Dasselbe war in so mancher Reichsstadt noch in unseren Tagen, wo dieser Titel wieder verschwand, üblich.

Kästner (in seiner Gesch. d. Mathem. 1. Th.) meint, das Rechnen auf dem Rechenbrette sey Anfängern sehr dienlich, wenigstens rücksichtlich des Erlernens der Numeration, Addition und Subtraktion, aber weniger dienlich rücksichtlich der Multiplikation und Division, welche leichter mit Hilfe der Ziffern vollendet würden. Ich will es versuchen, dieses Rechnen mit Steinchen oder Rechenpfenningen, das wir gegenwärtig beynahe gar nicht mehr kennen, auf die kürzeste Art so darzustellen, daß sich jeder, welchen dieser Gegenstand interessirt, eine deutliche Idee von demselben machen könne. Ich benütze hiezu die

„Deutsche Arithmetika. Inhaltend
die { Haußrechnung. / deutsche Koß. / Kirchenrechnung. }
Zu Nürnberg truckts Johann Petreius 1545."
Diese Schrift in 4 ist von dem berühmten Michael Stifel, welchem man die erste schriftliche Aeußerung der Idee von den Logarithmen zuschreibt. Kästnern scheint dieses Buch unbekannt geblieben zu seyn.

1000000
500000
100000
50000
10000
5000
1000
500
100
50
10
5
1
½

Man stelle sich auf einem Brette, Tische, ausgespannten Leder, oder einer Bank . . . paralleie Linien gezogen vor, und lasse die auf diese Linien und in ihre Zwischenräume gelegten Steinchen oder Rechenpfenninge von unten nach oben die Zahlen ½, 1, 5, 10 u. s. w., wie das Schema rechts zeigt, bezeichnen: so kann man das Numeriren in ganzen Zahlen. Um z. B. die im Schema links aufgelegte Zahl auszusprechen oder anzuschreiben, liest man von oben herein 1 Million; dann addirt man die Zahl im Zwischenraume zur Zahl auf der nächsten Linie u. s. w. Wenn auf einer Linie und dem nächst höhern Zwischenraume kein Zeichen liegt; so muß man sich eine Nulle denken, oder anschreiben. Jene links bezeichnete Zahl ist also die Zahl 1789069. Man sieht leicht ein, wie man umgekehrt diese gesprochene Zahl mit Rechenpfenningen hätte auf dem Brette auslegen, oder anschaulich darstellen können.

Zum Addiren mit Hilfe des Rechenbrettes giebt Stifel folgendes Beyspiel:

12 Bauern zinsen meinem Herrn jährlich, wie folgt:

Der 1ste	12	7	5
— 2.	25	8	8
— 3.	38	18	3
— 4.	9	13	4
— 5.	30	15	9
— 6.	71	12	11
— 7.	21	20	10
— 8.	3	2	10
— 9.	17	11	11
— 10.	92	10	3
— 11.	22	16	4
— 12.	13	5	16

Wie man diese Posten addiren sollte, lehrt er nicht; sondern er stellt die gefundene Summe so vor: fl. gr. pf.

d. i. 369 fl. 18 gr. 10 pf. und bemerkt, daß 12 pf. = 1 gr. u. 21 gr. = 1 fl. sey. Für die allmähliche Summirung jener Posten gebe ich folgendes Schema:

3. 2. 1.

fl. gr. pf. | fl. gr pf. | gr. pf.

Man zähle nämlich erst die Pfen., und für jedes Dutzend, das man zählt, lege man einen R. pf. auf die unterste Linie des mit gr. bezeichneten Raumes. Im Beysp. findet man am Ende 7 R. pfen. auf dieser Linie liegen; davon nimmt man 5 weg, und legt dafür 1 in den Zwischenraum. Dieß ist unter 1. vorgestellt. — Dann zählt man eben so die Groschen zusammen; weil man nun 21 gr. 6mal zählt; so wird dieß in der fl. kolumne notirt, und weil noch 11 gr. bleiben, diese aber mit den vorigen 7 18 gr. machen; so wird die Zahl 18 in der gr. kol. ausgelegt. — Eben so mit den fl.

Für das Subtrahiren giebt Stifel das Beyspiel: man soll von 9',286,170',534 die Zahl 984,392,760 abziehen. Man setze, beyde Zahlen, wie das Schema links zeigt, und zwar den Minuend mit den Rechenpf., den Subtrahend mit Ziffern an.

9
8
4
3
9
2
7
6
0

Das Schema rechts zeigt die Differenz = 8',301,777,774, welche man so bekömmt: man soll auf der 2ten obersten Linie 9 von 2 abziehen: weil man dieß nicht kann, so wechsele ich 1 Rechenpf. von der 10ten Linie herab, bleiben dort 3, und auf der 9ten Linie habe ich nun 2 + 10 Rechenpf., davon 9 weggenommen bleiben 3 was notirt wird, u. s. f. auf ähnliche Art.

Multiplikation. Vorher lehrt *Stifel* das *Halbiren* oder *Greifen* (der Linien). Man soll z. B. 365 halbiren. Man lege diese Zahl mit Rechenpf. auf dem Tische aus: dann lege man für jede 2 Rechenpf., welche auf der obersten Linie liegen, *einen* Rechenpf rechts auf dieselbe Linie. Nun bleibt links noch 1 Rechenpf., statt dessen lege man rechts 1 R pf. in den nächsten Zwischenraum. Dann folgt die Zahl 6, in welcher 2 *dreymal* enthalten ist; daher lege man 3 R. pf. rechts. Nun folgt links die Zahl 5, in welcher 2 *zweymal*, und ½mal enthalten ist; daher lege man auf die nächste Linie 2, und 1 Rechenpf. unter die Linie. Die Hälfte von 365 ist also 182 ½. So in allen Beyspielen.

Hierauf sagt *Stifel*: *Multipliziren mit Rechenpfenningen und Dividiren ist ein leicht und schlecht Ding, so du das Greiffen verstehst.* Wir wollen sehen. *Stifel* giebt folgendes Beyspiel; Es

sey 7208 mit 71 zu multipliziren. Man lege die erste Zahl mit Rechenpf. aus, und schreibe 71 und die Hälfte $35\frac{1}{2}$ für sich. Ich will nun am folgenden Schema die Behandlung dieses Beyspieles zeigen:

Zhl	1. Gr.	2 G.	E u. m. A	3 Gr.	S. m. B	4 Gr.	mit C	5. Gr.	mit D
	A		B		C		D		

Weil man im 1ten Zwischenraume 5 findet: so lege man $35\frac{1}{2}$ aus (in A), wie der 1te Griff zeigt, (dadurch hat man die Zahl 355000); 2) weil man auf der folgenden Linie von oben herein 2 Rechenpf. findet; so lege man die Zahl 71 zweymal aus; so hat man mit der Zahl in A die Zahl B = 497000; 3) weil man auf der nächsten Linie wieder 2 Rechenpf. sieht: so lege man wieder die Zahl 71 zweymal aus, wie der 3te Griff zeigt; dadurch hat man mit der Zahl in B die Zahl C = 511200; — 4) weil nun im untersten Zwischenraume 1 Rechenpf. liegt: so lege man wieder $35\frac{1}{2}$ aus, wie der 4te Griff zeigt; dadurch hat man mit C die Zahl D = 511555; — 5) wegen der 3 R. pf. auf der untersten Linie lege man 71 dreymal aus, wie der 5te Griff zeigt; dadurch hat man mit D die Zahl 511768, und dieß, sagt Stifel, ist die ganze Summa dieser Multiplicatz. Ich habe übrigens diese Art zu multipliziren, deutlicher darzustellen gesucht, als Stifel gethan hat, ungeachtet er mein Lehrmeister in dieser Kunst ist. Das berührte Summiren aber

ist lediglich nach der Kenntniß des Werthes der Rechenpf. auf den Linien und in den Zwischenräumen nach unserem 1ten obigen Schema richtig anzustellen.

Division. Man soll die eben gefundene Zahl 511768 durch 71 dividiren. Ich lege jene Zahl aus, und schreibe 71 und die Hälfte 35½ für mich:

	Zahl	Rest 1	Rest 2	Rest 3	Rest 4	Rest 0	Quot.	
3		1						
5		4	1					1ter
½		2	4					2ter
			2	3	2			3ter
				5	1			
				½	3			4ter

Der erste Griff geschieht auf die 3te Linie von oben herein, indem sowohl 71, als 35½ zweyziffrig ist; weil nun in der Zahl 57 nur der halbe Theiler enthalten ist: so lege ich einen Rechenpf. rechts unter die Linie, wodurch ich den ersten Quotienten 5000 habe. Dann wird den obigen Regeln der Subtraktion und des Halbirens gemäß die Zahl 35½ abgezogen; der erste Rest ist 156768. — Nun muß der zweyte Griff auf die 4te Linie geschehen; da finde ich in der Zahl 156 den Theiler 71 zweymal enthalten: ich lege also 2 Rechenpf. auf dieselbe Linie, und ziehe 71.2 = 142 von dem einzelnen Dividende ab. — Auf ähnliche Weise wird die Operation fortgesetzt.

Man sieht, daß das Multipliziren und Dividiren auf dem Rechenbrette denn doch nicht ein so leicht und schlecht Ding sey, als Stifel meinte. Indessen kömmt auch hier alles auf Uebung an.

Auch Hudalrichus Regius lehrt im 2ten Buche seines oben in der Einleitung angeführten Epitome diese Supputatio, quae fit in Abaco.

Der gemeinen Arithmetik Zweyter Theil.

Die Lehre von den Potenzen und der Auffindung ihrer Wurzeln, als ganzer Zahlen.

Einleitung.

§. 47.

Erklärung. Das Produkt aus einer Zahl in eben diese Zahl heißt Potenz oder Dignität (§. 28. der Einl.); die Zahl, welche, mit sich selbst multiplizirt, die Potenz giebt, heißt Wurzel. Die wievielste Potenz eine Zahl sey, wird aus der Anzahl der Wiederholungen desselben Aktes, wodurch die Zahl als Potenz entspringt, bestimmt. Setze ich z. B. die Wurzelzahl zweymal durch Multiplikation, wie 2×2, so nennt man die Zahl 4 die zweyte Potenz, oder das Quadrat von 2; setzte ich sie dreymal durch Multiplikation, wie $2 \times 2 \times 2$; so erhielte ich die Zahl 8 als die dritte Potenz, oder den Würfel, oder Cubus von 2.

Nach der Benennung der Dignität erhält auch die Wurzel ihren bestimmten Namen: so ist 2 die zweyte Wurzel von der zweyten Potenz 4, oder die Quadratwurzel vom Quadrate 4; und im zweyten Falle ist 2 die dritte Wurzel von der (dritten) Potenz 8, oder die Cubikwurzel von 8.

Man nennt übrigens, wiewohl etwas unrichtig, jede Zahl, als einmal durch Multiplikation gesetzt (§. 16.), die erste Potenz.

§. 48. Bezeichungsart der Potenzen und Wurzeln. Man bezeichnet jede bestimmte Potenz dadurch, daß man über ihre Wurzelzahl eine kleinere Ziffer etwas zur Rechten setzt, welche die Zahl der Wiederholungen desselben Aktes, durch den die Potenz erzeugt wird, bezeichnet. Man deutet nämlich das Quadrat durch die kleinere Ziffer 2, über dessen Wurzel gesetzt, an. Z. B. $2^2 = 4$; den Würfel durch die kleinere Ziffer 3 über dessen Wurzel, z. B. $2^3 = 8$. Diese kleinere Ziffer, über eine Zahl gesetzt, heißt der Exponent der Zahl.

Das Erzeugen einer Potenz aus einer Zahl heißt das Erheben dieser Zahl zur Potenz; der Exponent zeigt folglich an, zu welcher bestimmten Dignität die Zahl soll erhoben werden. Das Auffinden der Wurzel aus einer zur Dignität wirklich erhobenen Zahl heißt das Ausziehen der Wurzel. Das Zeichen für dieses Ausziehen ist $\sqrt{}$. Die wievielste Wurzel man aus einer gegebenen Potenz ausziehen soll, wird ebenfalls durch eine kleinere in jenes Zeichen gesetzte Ziffer, welche jene Zahl ausdrückt, angedeutet. Verlangte man z. B. die dritte Wurzel aus 8: so deutet man dieses durch $\sqrt[3]{8}$; oder die zweyte Wurzel von 4 durch $\sqrt[2]{4}$. Man ist aber darin übereingekommen, daß schon das blose Wurzelzeichen, vor einer Zahl gesetzt, die Ausziehung der Quadratwurzel bedeutet; man setzt daher nur $\sqrt{4}$, statt $\sqrt[2]{4}$. Die kleinere Ziffer oder Zahl über dem Wurzelzeichen heißt der Exponent der Wurzel.

§. 49. Zusatz. Man sieht aus den vorhergehenden §§. ein, daß das Wesentliche der Kenntniß von den Potenzen sich auf die Erhebung der Zahlen zur Potenz, und auf die Ausziehung der Wurzeln aus gegebenen Potenzen beziehe. Ferner liegt der Grund, warum wir jene Kenntniß in den

folgenden 2 Abschnitten nur in Beziehung auf die zweyte und dritte Potenz, und zwar vorerst als ganze Zahlen, mittheilen, darin, weil nur die Kenntniß dieser P tenzen in der gemeinen Arithmetik vom vorzüglichen Gebrauche und Nutzen ist.

Der
Lehre von den Potenzen.
Erster Abschnitt.

Von der Erhebung einer ganzen Zahl zum Quadrate und der Ausziehung der Quadratwurzel.

---

§. 50. Aufgabe. Eine gegebene einziffrige ganze Zahl zum Quadrat zu erheben.

Auflösung. Man multiplizire die gegebene Zahl einmal mit sich selbst, so hat man die verlangte Potenz.

Beyspiel. $8^2 = 8 \times 8 = 64$.

Beweis. Dieser liegt in der Erklärung vom Quadrate §. 47.

Anmerkung. Folgende Tabelle enthält die Quadrate der 9 ersten ganzen Zahlen.

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, daß das Quadrat jeder einziffrigen Zahl höchstens aus 2 Ziffern bestehe.

§. 51. Zusatz. Da das Multipliziren der Einheit von einer gewissen Ordnung (§. 11. d. Einl.) durch die Einheit von gewisser Ordnung nichts ist, als ein Erhöhen ihrer Ordnung um die Ordnung der andern Einheit (§. 19.):

so ist das Quadriren der Einheit nur ein Verdoppeln ihrer Ordnung; d. i. man quadrirt sie, wenn man der Ziffer 1 für jede der Wurzel beygehängte Nulle ein Paar Nullen beyfügt. Z. B. $10^2 = 100$; $100^2 = 10000$.

Mittels eines ähnlichen Schlußes vermöge §. 20. sieht man ein, daß jede ganze Zahl, die durch bedeutende Ziffern mit angehängten Nullen ausgedrückt ist, zum Quadrat erhoben werde, wenn man dem Quadrate aus ihren bedeutenden Ziffern soviel Paar Nullen beyfügt, als einzelne Nullen in der Wurzel beygefügt sind. So ist $20^2 = 400$; $600^2 = 360000$; oder $2300^2 = 23^2\,0000$.

Man drückt dieß kurz so aus: jede Nulle in der Wurzel giebt im Quadrate 2 Nullen.

§ 52 Aufgabe. Aus einem gegebenen Quadrate, das, als ganze Zahl, aus einer oder zwey bedeutenden Ziffern besteht, die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung. Man suche das gegebene Quadrat in obiger Tabelle, die ihr entsprechende Zahl ist die gesuchte Wurzel.

Beyspiel. $\sqrt{64} = 8$; oder $\sqrt{25} = 5$.

Beweis. Dieser erhellt aus der Construktion jener Tabelle, und aus §. 47. von selbst.

§. 53. Zusatz 1. Aus §. 51. erhellt, daß, wenn den bedeutenden Ziffern eines Quadrats, wie die Aufgabe ausdrückt, Nullen angehängt sind, man die Wurzel erhalte, wenn man der auf vorige Art gefundenen bedeutenden Ziffer so viele Nullen anhängt, als Paare von Nullen im gegebenen Quadrate sind. Z. B. $\sqrt{360000} = 600$; oder $\sqrt{4000000} = 2000$.

§. 54. Zusatz 2. Wie wir bey der Division jede gegebene Zahl vor der Hand als ein Produkt aus 2 Faktoren,

als ganzen Zahlen, betrachteten, wovon die eine als Divisor gegeben, die andere aber als Quotient gesucht werden sollte (§. 23.); wie daher der Quotient, als ganze Zahl, für den wahren gehalten wurde, wenn diese Zahl, mit dem Divisor multiplizirt, entweder ein dem Dividend gleiches oder nächstkleineres Produkt gab: eben so betrachtet der Arithmetiker jede gegebene Zahl vor der Hand als Quadrat, und sucht daraus nach denselben Regeln die Wurzel, als ganze Zahl, welchen gemäß diese aus einem wahren Quadrate aufgefunden wird.

Giebt die aufgefundene Wurzel, mit sich selbst multiplizirt, die gegebene Zahl: so nennt der Arithmetiker diese ein vollkommenes Quadrat; kann aber nur eine solche ganze Zahl als Wurzel aufgefunden werden, welche, durch sich selbst multiplizirt, nur ein nächstkleineres Quadrat, in Vergleich mit der als Potenz betrachteten Zahl, giebt: so nennt er diese Zahl ein unvollkommenes Quadrat.

Vermöge dieser Voraussetzung und des § 47. gilt also auf ähnliche Art, wie §. 29. der allgemeine Satz:

Die aus einer gegebenen ganzen Zahl, als Potenz betrachtet, gezogene Wurzel, als ganze Zahl, ist die wahre, wenn sie so oft durch Multiplikation gesetzt, als ihr Exponent Einheiten enthält, entweder der gegebenen Potenz gleich ist, oder die nächstniedere Potenz giebt.

Beyspiel. Es ist $\sqrt{63} = 7$, als ganze Zahl, nach der Tabelle. Aber $7 \times 7 = 49$; dieses Quadrat von 63 abgezogen, bleibt 14 als Rest. Eben so ist $\sqrt{7} = 2$, als ganze Zahl; das Quadrat von 2, nämlich 4 von 7 abgezogen, bleibt der Rest $= 3$.

Anmerkung. Wie man mit diesen Resten verfahre, soll unten bey den Dezimalbrüchen vorkommen. Beyspiele aber, wie die des §. 53. müssen überhaupt nach der Regel über die unten vorkommende Aufgabe des §. 57. berechnet werden, wenn die bedeutenden Ziffern der Zahl kein vollkommenes Quadrat ausmachen.

§. 55. **Aufgabe.** Das Quadrat einer gegebenen ganzen mehrziffrigen Zahl zu finden.

Auflösung 1. Man multiplizire die gegebene Zahl mit sich selbst: so hat man das verlangte Quadrat.

Beyspiel. $(2345)^2 = 2345 \times 2345 = 5499025$.

Beweis. Dieser erhellt aus §. 46.

Auflösung 2. Man setze zum Quadrate der ersten Ziffer der gegebenen Zahl 1) das doppelte Produkt aus der zweyten Ziffer in die erste, und 2) das Quadrat der zweyten Ziffer selbst, so, daß man immer von der Linken zur Rechten um eine Stelle hinausrückt.

Besteht die Zahl aus 3 Ziffern: so setzt man nach der vorigen Art unter die vorher erhaltenen Zahlen 3) das doppelte Produkt aus der dritten Ziffer in die beyden ersten und 4) das Quadrat der dritten Ziffer selbst.

Besteht die gegebene Zahl aus 4 Ziffern: so setzt man auf dieselbe Art unter die vorigen Zahlen 5) das doppelte Produkt aus der vierten Ziffer in die drey vorhergehenden Ziffern und 6) das Quadrat der vierten Ziffer selbst. U. s. w. auf gleiche Art, wenn die gegebene Zahl aus noch mehreren Ziffern bestünde. Die so untereinandergesetzten Zahlen am Ende addirt, erhält man das verlangte Quadrat.

Beyspiel. Sollte die Zahl 2345 zum Quadrat erhoben werden, so setzte man I $2^2 + 2 . 3 \times 2 + 3^2$; II. $2 . 4 \times 23 + 4^2$; III $2 . 5 \times 234 + 5^2$ auf folgende Art:

```
I   ⎧4
    ⎨12
    ⎩  9
II  ⎧184
    ⎩  16
III ⎧2340
    ⎨   25
    ⎩________
5499025 = (2345²) dem verlangten Quadrate.
```

Beweis. Man hat hier nur zu zeigen, daß nach der 2ten Auflösung unserer Aufgabe die angegebene Zahl wirklich mit sich selbst, wie bey der ersten Auflösung, nur auf eine veränderte, aber gesetzmäßige, Art, multiplizirt werde.

Man denke sich die gegebene Zahl mit Rücksicht auf den Generalwerth der Ziffern in 4 Glieder getheilt; so hat man 2000 + 300 + 40 + 5. Um demnach das Quadrat der gegebenen Zahl zu haben, muß das Produkt aus den 2 Faktoren

2000 + 300 + 40 + 5
2000 + 300 + 40 + 5

gesucht werden; dieß heißt: man muß alle Glieder des obern Faktors nach dem Gesetze des untern, und alle Glieder des untern nach dem Gesetze des obern Faktors multipliziren; denn nur in diesem Falle hat man die Zahl 2345 mit sich selbst multiplizirt.

Man setze nun, indem man, von der Rechten zur Linken, die 2 ersten Glieder beyder Faktoren miteinander multiplizirt:

2000 + 300
R) 2000 + 300

4000000 + 600000
+ 600000 + 90000

I) 4000000 + 1200000 + 90000.

Setzt man ferner das 3te untere Glied 40 als Faktor der 2 obern Glieder 2000 + 300, oder 2300; so erhält man 2300 × 40 = 92000; und setzt man eben so das 3te obere Glied 40 als Faktor der 2 untern 2000 + 300, oder von 2300; so erhält man das nämliche Produkt noch einmal, oder das doppelte Produkt von 92000, nämlich 184000; setzt man zu diesem noch das Produkt aus dem obern 3ten Gliede 40 in das untere dritte, oder umgekehrt, so erhält man

II) 184000 + 1600

Multiplizirt man ferner die drey ersten Glieder des oberen Faktors noch mit dem 4ten Gliede des untern, d. i. 2000

+ 300 + 40, oder 2340 durch 5; so erhält man 11700. Multiplizirt man eben so die 3 ersten Glieder des untern Faktors durch das 4te Glied des obern; so erhält man dasselbe Produkt, wie vorher, oder das doppelte Produkt 11700 . 2 = 23400. Setzt man zu diesem Produkte noch das wechselseitige Produkt aus dem letzten obern Gliede in das letzte untere, nämlich 25; so hat man

III) 23400 + 25

Diese Produkte zusammen addirt, findet man das obige gesuchte Quadrat der Zahl 2345; nämlich

I)	4000000	=	4
	1200000		12
	90000		9
II)	184000	=	184
	1600		16
III)	23400	=	2340
	25		25

Aus der Art, wie wir die Entstehung des Quadrats aus einer gegebenen Zahl in diesem auf das Beyspiel angewandten Beweise darstellten, erhellt erstens, daß das Quadrat aus einer zweyziffrigen Zahl bestehe 1) aus dem Quadrate der ersten Ziffer, 2) aus dem doppelten Produkte der zweyten Ziffer in die erste; 3) aus dem Quadrate der zweyten Ziffer. Es folgt dieses, wie wir zeigten, aus der Natur der Multiplikation einer zweyziffrigen Zahl durch eben diese Zahl nothwendig. (Ein Beyspiel hiezu ist das oben mit R bezeichnete.) Der Grund dieser Nothwendigkeit liegt, kurz ausgedrückt, in der hier obwaltenden Wechselseitigkeit der Multiplikation. Sind nämlich die 2 Faktoren das erste Glied des Multiplikands und das erste Glied des Multiplikators: so wird eben dadurch, daß ich jenes Glied nach dem Gesetze von diesem multiplizire, dieses erste Glied des Multiplikators auch nach dem Gesetze des ersten Gliedes des Multiplikands multiplizirt, und es entsteht, weil beyde Glieder dieselbe Ziffer oder Zahl sind, das Qua-

drat der ersten Ziffer; dieselbe Bewandtniß hat es mit dem letzten Gliede beyder Faktoren, und es entsteht das Quadrat der zweyten Ziffer. Nun muß noch das zweyte Glied des untern Faktors durch das erste Glied des obern Faktors wechselseitig, d. i. auch dieses durch jenes multiplizirt werden, d. i. man erhält das nämliche Produkt zweymal; so entsteht das doppelte Produkt der zweyten Ziffer in die erste.

Es erhellt zweytens, daß, wenn die dritte Ziffer zu den 2 vorigen hinzukömmt, und man die dritte Ziffer wieder als die letzte betrachtet, durch diese Ziffer, als letztes Glied des untern Faktors, die 2 ersten Glieder des obern Faktors multiplizirt werden müssen, und wechselseitig; d. i. durch dieselbe Ziffer, als letztes Glied des obern Faktors, müssen auch die 2 ersten Glieder des untern Faktors, welche dieselbe Ziffern enthalten, wie die des obern, multiplizirt werden; man erhält folglich auch das doppelte Produkt der dritten Ziffer in die 2 vorhergehenden, und das dritte obere Glied mit dem dritten untern, als derselben Zahl oder Ziffer, multiplizirt, das Quadrat der dritten Ziffer selbst.

Da dieselbe wechselweise Multiplikation auch in Ansehung der vierten, fünften . . . . Ziffer, deren jede immer als die letzte betrachtet werden kann, angewendet werden muß, um die aus jenen Ziffern bestehende Zahl zum Quadrat gehörig zu erheben: so folgt, daß der folgende Satz allgemeine Gültigkeit habe:

Die (constitutiven) Theile des Quadrats jeder vielziffrigen ganzen Zahl sind 1) das Quadrat jeder Ziffer, und 2) das doppelte Produkt jeder folgenden Ziffer in ihre vorhergehenden Ziffern.

Statt Ziffer kann man auch sprechen, Wurzelziffer oder Wurzelnote.

§. 56. Zusatz 2. Da jede folgende (die 2te, 3te ...) Wurzelziffer einer zum Quadrat zu erhebenden ganzen Zahl im Quadrate nebst dem doppelten Produkte aus ihr in ihre

vorhergehenden Ziffern auch ihr eigenes Quadrat, also jede folgende Ziffer im Quadrate zwey neue Ziffernstellen giebt: so folgt, daß, wenn man von der Rechten zur Linken ein gegebenes Quadrat, als ganze mehrziffrige Zahl, in Klassen eintheilt, und zu jeder Klasse 2 Ziffern nimmt, gerade soviel Klassen erhalten werden, wieviel Ziffern die Wurzelzahl enthält, woraus das Quadrat entspringt. Aus der Anmerkung zum §. 49. erhellt, daß die letzte Klasse zur Linken aus einer oder aus 2 Ziffern bestehe. Ein Beyspiel hiezu ist das im §. 55. angegebene Quadrat, welches durch Striche gehörig abgetheilt, das Gesagte aufhellt.

4			
1	2		
	9		
	18	4	
		16	
	2	34	0
			25
5	49	90	25

In Betreff der 2 neuen Zifferstellen, welche jede folgende Wurzelziffer, oder Wurzelnote im Quadrate giebt, darf man nicht übersehen, welche Stelle von dem doppelten Produkte aus eben der folgenden Wurzelnote in die vorhergehenden Ziffern, und welche Stelle lediglich durch das Quadrat derselben folgenden Wurzelnote gegeben werde? Nämlich jenes Produkt giebt nothwendig unter den 2 neuen Zifferstellen die erste und höchste, das Quadrat aber der Wurzelziffer giebt die letzte oder nächstniedere Stelle.

In unserem Beyspiele giebt die 2te Wurzelziffer 3 durch die Bestandtheile 12 und 9 die 2 Zifferstellen der 100tausender und 10tausender; die 3te Ziffer giebt durch ihre Bestandtheile 184 und 16 die 2 neuen Zifferstellen der Tausender und Hunderter u. s. w. und zwar geben jedesmal die Produkte 12, 184, 2340 unter diesen 2 Zifferstellen die höchste, weil die Ziffer 3 den Generalwerth der Hunderter, die ihr vorhergehende Wurzelziffer aber den Generalwerth der Tau-

sender, also das Produkt 12 nothwendig den Generalwerth der 100tausender hat. Allein das Quadrat 9 kann nur den nächstniederen Generalwerth der 10tausender haben, weil 100. 100 nur = 10000 ist. Eben so muß die letzte Wurzelnote 5 die Stelle der Zehner und Einer geben, und zwar das Produkt aus 5 in 234 d. i. in 234 Zehner, oder das Produkt aus Einer in Zehner giebt Zehner; allein das Quadrat von 5, als Produkt von Einer in Einer, giebt Einer.

Anmerkung. Es ist für sich klar, daß hier die Probe dieselbe ist, wie §. 24. und §. 25., wenn man nicht die Probe durch Ausziehung der Wurzel machen will, oder man darf nur aus der Wurzel alle Neuner wegwerfen, den Rest mit sich selbst multiplziren, und aus diesem Produkte wieder alle Neuner wegwerfen: so muß der erhaltene Rest mit dem durch die Wegwerfung aller 9 aus der berechneten Potenz erhaltenen Reste übereinstimmen. So ist 5 der fragliche Rest aus der Wurzel 2345, und 5 . 5 = 25, also der Rest = 7, welcher auch in dem Quadrate gefunden wird.

§. 57. **Aufgabe. Aus einer gegebenen mehr als zweyziffrigen ganzen Zahl die Quadratwurzel auszuziehen.**

Auflösung. 1) Man theile die gegebene Zahl nach §. 56. in Klassen. Dadurch weiß man vor der Hand, daß man eben soviel Wurzelziffern finden müsse, als Klassen sind.

2) Man suche aus dem Täfelchen §. 50. dasjenige Quadrat, welches entweder der Zahl der ersten Klasse zur Linken gleich, oder das nächstkleinere Quadrat ist; die diesem entsprechende Wurzelzahl setze man hinter dem gegebenen Quadrate als erste Ziffer der aufzufindenden Wurzel.

3) Das so aufgesuchte Quadrat ziehe man von der Zahl der ersten Klasse ab, und (es mag 0 oder ein Rest bleiben) setze die zweyte Klasse herab. Man bemerke dieß oben mit einem Striche oder Punkte.

4) Von der vorhin erhaltenen Zahl schneide man die letzte Ziffer zur Rechten ab, die aufgefundene erste Wurzelziffer multiplizire man mit 2, und durch dieses Produkt dividire man die in 3) nach Abschneidung der letzten Ziffer erhaltene Zahl. Den Quotienten, als ganze einziffrige Zahl, setze man nach der in 2) aufgefundenen Ziffer als zweyte Wurzelziffer.

5) Neben jenem in 4) erhaltenen Produkte setze man diese zweyte Wurzelziffer zur Rechten, und unter diese Zahl eben diese Ziffer als Multiplikator. Das aus dieser Multiplikation erhaltene Produkt ziehe man dann von der in 3) erhaltenen vollständigen Zahl ab.

6) Man setze, wie in 3), die dritte Klasse herab, und schneide wieder die letzte Ziffer ab; multiplizire jetzt die 2 ersten aufgefundenen Wurzelziffern mit 2, und dividire durch dieses Produkt, wie in 4). Der so gefundene Quotient ist die dritte Wurzelziffer.

7) Neben dem in 6) aufgefundenen Produkte setze man wieder, wie in 5) die dritte Wurzelziffer, und unter diese Zahl eben diese Wurzelziffer, als Faktor. Das aus dieser Multiplikation erhaltene Produkt ziehe man wieder von der in 6) erhaltenen vollständigen Zahl ab.

8) Man fahre nun auf gleiche Art, wie in 6) und 7), weiter fort, so lange noch Klassen da sind.

9) Bleibt, nachdem man die letzte Klasse herab gesetzt, die letzte Wurzelziffer aufgefunden, und das wie in 5) und 7) erhaltene Produkt abgezogen hat, kein Rest mehr: so machen die aufgefundenen Ziffern die vollständige Wurzel als ganze Zahl aus; diese Zahl daher mit sich selbst multiplizirt, stellt die gegebene Zahl als Quadrat wieder her.

Bleibt aber ein Rest, so ist dieß ein Zeichen, daß man die gegebene Zahl nur als Quadrat betrachtete, um aus ihr eben so, als wäre sie wirklich ein Quadrat, die Wurzel auszuziehen. In diesem Falle heißt dann, wie im §. 48., die gegebene Zahl ein unvollkommenes Quadrat, und die auf-

gefundene Wurzel, als ganze Zahl, nur die nächste Wurzel. Im ersten Falle aber heißt die gegebene Zahl ein vollkommenes Quadrat.

Anmerkung. Der aus der in 4) und 6) vorgeschriebenen Division erhaltene Quotient ist öfters um Eins zu hoch, in wiefern er als Wurzelziffer betrachtet wird. Man sieht dieß daraus, wenn das in 5) und 7) erhaltene Produkt grösser wird, als die Zahl, von welcher dieses abgezogen werden soll. Jede folgende Wurzelziffer ist daher nicht sogleich, sondern nur versuchsweise zu bestimmen.

Sollte man aber Null zum Quotienten erhalten: so wird auch dieses den Wurzelziffern beygefügt, die nächste Klasse herabgesetzt, und dann wie in 6) verfahren.

Beyspiel. $\sqrt{5499025}$. Man setze, wie folgt: (die beygefügten Nummern beziehen sich auf die Nummern der gegebenen Vorschriften)

Zahl.	Wurzel.			
5|49,|90,25,	2345			
4				
14,9	4) Div. 14	4 / 3;	5)	43 × 3 = 129
12,9				
209,0	6) Div. 209	46 / 4;	7)	464 × 4 = 1856
185,6				
2342,5	8) Div. 2342	468 / 5;	9)	4685 × 5 = 23425.
2342,5				
0				

Beweis. Dieser erhellt aus der Natur der Sache selbst. Wie nämlich die Regeln der Division einer mehrziffrigen Zahl durch eine andere ein- oder mehrziffrige Zahl (§§. 36. 37.) darauf hinleiteten, die Hauptprodukte, woraus der Dividend zusammengesetzt betrachtet wird, auf eine kurze, aber gesetzmäßige Weise nachzubilden, nach deren Sub-

traktion demnach nothwendig entweder Null, oder ein kleinerer Rest, als der Divisor selbst, blieb: — eben so können die zur Ausziehung der Wurzel, als dem Umgekehrten der Erhebung zur Dignität, gegebenen Vorschriften nur anleiten, die einzelnen Bestandtheile einer Potenz nachzubilden, welche dann von der gegebenen Potenz abgezogen, nothwendig entweder Null, oder irgend eine Zahl als Rest lassen. Dieser Rest aber muß immer kleiner seyn, als die Bestandtheile, welche die Einheit, als folgende Wurzelziffer, in der Potenz giebt. Denn im entgegengesetzten Falle wären nach den Vorschriften zur Auflösung der Aufgabe nicht alle Bestandtheile, welche eine ganze Wurzelzahl in der Potenz giebt, von dieser abgezogen worden. In beyden Fällen aber, es mag nämlich ein solcher Rest, oder Null bleiben, ist es offenbar, daß nach den Vorschriften die wahren Ziffern der Wurzel, als ganzer Zahl, aufgefunden wurden; weil nur mittels der Auffindung dieser wahren Ziffern jene Nachbildung und folglich selbst das Abziehen der Bestandtheile einer Potenz möglich ist.

Dieses im Allgemeinen vorausgesetzt, wollen wir darthun, daß die zur Auflösung unserer Aufgabe gegebenen Vorschriften zu eben jenem Nachbilden der Bestandtheile, welche eine mehrziffrige Wurzel im Quadrate giebt, kurz, aber wahr anleiten.

Die Regel unter Nr. 1) folgt aus §. 56.

Nr. 2) Da hier 4 Wurzelziffern aufgefunden werden müssen, so muß die erste den Generalwerth von Tausend, folglich ihr Quadrat den von Million (denn 1000 . 1000 = 1000000) haben. Die erste Wurzelziffer kann also nur in der ersten Klasse zur Linken aufgesucht werden, weil die übrigen Ziffern alle von einer niedern Ordnung sind. Diese Wurzelziffer ist nun bestimmt 2, oder 2000.

Nr 3) Durch diese, wie jede folgende, vorgenommene Abziehung werden diejenigen Ziffern, welche aus späteren Theilen des Quadrats mit andern früheren durch Addition

verbunden wurden, wieder, wie oben bey der Division, gesöndert.

Nr. 4) Die 2te Klasse muß eine Wurzelziffer, oder die zweyte gesuchte Wurzelnote geben. Es ist nun offenbar am natürlichsten, diese Wurzelnote aus demjenigen der zwey, in jener Klasse enthaltenen, Bestandtheile aufzusuchen, in welchem sie einfach, oder nicht potenzirt, vorkömmt. Diese zwey Bestandtheile, welche die zweyte Wurzelziffer im Quadrat giebt, sind, wie wir beym Erheben sahen, a) das doppelte Produkt aus ihr in die erste Wurzelziffer, b) ihr eigenes Quadrat. Die gesuchte Wurzelziffer kömmt also als einfacher Faktor in jenem Produkte vor, welches außer dieser Wurzelziffer noch 2 Faktoren, nämlich die Zahl zwey und die erste Wurzelziffer, oder diese beyde miteinander multiplizirt gedacht, nur noch einen Faktor, nämlich die doppelte erste Wurzelnote, enthält. Wenn man daher die erste aufgefundene Wurzelnote = 2 verdoppelt, und durch diesen Faktor = 4 jenen ersten Bestandtheil dividirt: so ist der Quotient der andere Faktor, den wir als Wurzelziffer suchen.

Es fragt sich nun noch, in welchen Ziffern sollen wir jenes Produkt, als ersten Bestandtheil, suchen, — um richtig dividiren zu können? Diese Frage entscheidet sich aus dem, was wir oben am Schlusse des §. 56. eigends bemerkt haben. Die Zahl nämlich, welche diesen Bestandtheil ausdrückt, kann zwar mehr als eine Ziffer haben, aber unter den 2 neuen Zifferstellen, welche die zweyte Klasse hat, gehört zu jener Zahl bestimmt nur noch die erste zur Linken, oder die höchste; durch die zweyte müssen wir das Quadrat der zweyten Wurzelziffer ausgedrückt denken. In unserem Beyspiele dürfen wir daher zur Ziffer 1 im Reste nur noch die erste Ziffer 4 aus den 2 Ziffern 49 der zweyten Klasse hinzusetzen, um das wahre Produkt, oder den wahren ersten Bestandtheil zu bekommen, durch dessen Division wir unsere Wurzelziffer 3 finden.

Dieß der Grund von dem in der obigen Regel angegebenen Abschneiden der letzten Ziffer zur Rechten!

Nr. 5) Um die 2 Bestandtheile, welche die aufgefundene Wurzelziffer im Quadrate giebt, wieder nachzubilden, und sie dann von 149 abzuziehen, hat man zwey Wege: entweder bildet man sie eben so nach, wie beym Erheben, indem man setzt:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 9 \\ \hline 129 \end{array}$$ (man sehe das Beyspiel im §. 56.)

oder indem man auf kürzere Weise nach der Regel verfährt, wodurch nothwendig dasselbe erhalten wird. Denn die erste Wurzelziffer 2 hat einen 10fach höheren Generalwerth, als die zweyte, wenn man daher diese blos wie Einer durch die Ziffer 3 ausdrückt, so muß man jene durch 20, und ihr doppeltes durch 40 ausdrücken. Statt nun sowohl 40, als 3, oder 40 + 3 einzeln mit 3 zu multipliziren, um jene Bestandtheile 120 + 9 nachzubilden, ist es offenbar dasselbe, wenn man schreibt 43 × 3.

Da die unter den folgenden Nummern enthaltenen Regeln eigentlich nur sagen, wie man das bisher als gesetzmäßig und gültig nachgewiesene Verfahren wiederholt anwenden solle, um eine 3te, 4te . . . Wurzelziffer aufzufinden: so bedürfen eben jene Regeln keines weiteren Beweises.

Da ferner die Entstehungsart des Quadrats selbst, nach §. 55. überall dieselbe ist, aus wievielen Ziffern auch die zu erhebende Zahl bestehen mag, folglich auch die Nachbildung der Bestandtheile, welche jene Ziffern im Quadrate geben, überall dieselbe ist, das gegebene Quadrat bestehe aus so vielen Klassen, als es wolle: so haben die gegebenen Vorschriften allgemeine Gültigkeit. In Ansehung der Wurzelausziehung aus unvollkommenen Quadratzahlen fügen wir nur nur noch einige Beyspiele bey:

I. 96|94,|00,|60, | Wurzel.
9845

81

159,4 — 4) Div. 159 | 18 / 8 ; 5) 188 × 8 = 1504

150,4

900,0 — 6) Div. 900 | 196 / 4 ; 7) 1964 × 4 = 7856

785 6

11440,0 — 8) Div. 11440 | 1968 / 5 ; 9) 19685 × 5 = 98425

9842 5

R. 15975

II. 25|06,|00,|37 | 5006

25

06003,7

6003 6

R. 1

§. 58. **Probe.** Diese ist im §. 54. ausgedrückt.

Anmerkung. Die sogenannte Ausziehung der Quadratwurzel durch Näherung kömmt unten im §. 121. bey den Dezimalbrüchen vor.

Der Lehre von den Potenzen

Zweyter Abschnitt.

Von der Erhebung einer ganzen Zahl zum Würfel, und der Ausziehung der Cubikwurzel.

---

§. 59. Aufgabe. Eine gegebene einziffrige ganze Wurzel zum Würfel zu erheben.

Auflösung. Man multiplizire das Quadrat (§. 50.) der gegebenen Zahl mit eben dieser Zahl.

Beyspiel. $3^3 = 9 \cdot 3 = 27$.

Beweis. Jede Zahl dreymal durch Multiplikation gesetzt, oder, was dasselbe ist, zweymal nach ihrem eigenen Gesetze multiplizirt, giebt nach §. 47. den Würfel derselben Zahl. Man erhält aber, wenn man die Zahl zweymal durch Multiplikation setzt, ihr Quadrat, folglich ihren Würfel, wenn man dieses Quadrat nochmals durch die gegebene Zahl multiplizirt. Da dieser Beweis allgemein für die Erhebung jeder Zahl zur dritten Potenz gilt: so ist er auch in Ansehung des vorgelegten Falles gültig.

Anmerkung. Hieher gehört folgendes Täfelchen:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Würfel	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Aus dieser Tabelle sieht man, daß der Cubus einer einziffrigen Zahl aus höchstens 3 Ziffern bestehe.

§. 60. Zusatz. Durch einen ähnlichen Schluß, wie im §. 51., in Verbindung mit der Erklärung vom Würfel (§. 46.) leuchtet ein, daß jedes Null in der Wurzel drey

Nullen im Cubus gebe. So ist $10^3 = 1000$; und $300^3 = 27000000$; oder $6400^3 = 64^3\,000000$.

§. 61. **Aufgabe. Aus einem gegebenen Würfel, der, als ganze Zahl, aus höchstens drey bedeutenden Ziffern besteht, die dritte Wurzel auszuziehen.**

Auflösung. Man suche den gegebenen Würfel in der vorigen Tabelle auf; die ihm entsprechende Zahl ist die gesuchte Cubikwurzel.

Beyspiel. $\sqrt[3]{216} = 6$; $\sqrt[3]{8} = 2$.

Beweis. Dieser erhellt aus der Construktion der Tabelle und aus §. 47. von selbst.

§. 62. Zusatz 1. Sind den bedeutenden Ziffern einer gegebenen dritten Dignität Nullen zur Rechten beygefügt: so hat man die Wurzel, wenn man nach §. 60. für jede drey Nullen eine Nulle der nach §. 61. aufgefundenen bedeutenden Ziffer beyfügt. So ist $\sqrt[3]{216000} = 60$.

§. 63. Zusatz 2. Der im §. 54. allgemein ausgedrückte Satz gilt auch hier. Betrachtet man nämlich irgend eine Zahl als Würfel, so kann man aus ihr, sie mag nun ein vollkommener, oder unvollkommener Würfel seyn, die dritte Wurzel aufsuchen. Diese ist dann, als ganze Zahl, die wahre Wurzel, wenn sie, dreymal durch Multiplikation gesetzt (§. 47), entweder die gegebene Zahl selbst, oder den nächstniedrigen Würfel giebt.

So ist z. B. 5, als ganze Zahl, die wahre Cubikwurzel aus dem unvollkommnen Würfel 126.

Uebrigens gilt die Anmerkung zu §. 54. auch hier, auf den Würfel angewendet.

§. 64. **Aufgabe. Den Würfel einer gegebenen ganzen mehrziffrigen Zahl zu finden.**

Auflösung 1. Man multiplizire das Quadrat der gegebenen Zahl nochmals mit eben dieser Zahl: so hat man den verlangten Würfel der Zahl.

Beyspiel. $2345^3 = 5499025$ (§. 54.) $\times 2345 = 12895213625$.

Beweis. Dieser ist durch die Erklärung des Würfels (§ 47.) gegeben.

Auflösung 2. A. Besteht die gegebene Zahl aus 2 Ziffern: so setze man zum Würfel der ersten Ziffer der gegebenen Zahl 1) das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der ersten Ziffer in die zweyte; 2) das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der zweyten Ziffer in die erste; 3) den Cubus der zweyten Ziffer selbst, so, daß man immer, mit den 2 letzten Produkten, von der Linken zur Rechten um eine Stelle hinausrückt.

B. Besteht die Zahl aus drey Ziffern: so setze man auf dieselbe Weise unter die vorher erhaltenen Zahlen 1) das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der zwey vorhergehenden Ziffern in die dritte; 2) das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der dritten Ziffer in die beyden ersten; 3) den Würfel der dritten Ziffer selbst.

C) Besteht die gegebene Zahl aus 4, 5, 6 .. Ziffern: so verfährt man immer auf dieselbe Art.

Die so untereinander gesetzten Zahlen am Ende addirt, erhält man den verlangten Würfel.

Beyspiel. Will man die Zahl 2345 zum Cubus erheben: so setze man

$$\text{I. } 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 3^3;$$

$$\text{II. } 3 \cdot 23^2 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 \cdot 23 + 4^3;$$

$$\text{III. } 3 \cdot 234^2 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 \cdot 234 + 5^3$$

folgendermaßen:

I. { 8
36
54
27

II. { 6348
1104
64

III. { 821340
17550
125

Würfel = 12895213625.

Beweis. Man hat auch hier wieder nur zu zeigen, daß die gegebene Zahl nach dieser zweyten Auflösung eben so, wie nach der ersten, mit sich selbst, auf eine gesetzmäßige Art, multiplizirt werde.

Denkt man sich wieder die gegebene Zahl in Gliedern getheilt, und anstatt der Nullen nur Punkte gesetzt, so erhält man folgende drey Faktoren:

1) 2 . . . + 3 . . + 4 . + 5
2) 2 . . . + 3 . . + 4 . + 5
3) 2 . . . + 3 . . + 4 . + 5

die miteinander multiplizirt werden müssen, um den Cubus der Zahl 2345 zu haben. Man muß demnach alle Glieder des ersten Faktors nach dem Gesetze des zweyten sowohl, als dritten; eben so alle Glieder des 2ten Faktors nach dem Gesetze des ersten und dritten, und endlich auch alle Glieder des dritten Faktors sowohl nach dem Gesetze des ersten, als zweyten Faktors multipliziren. Es herrscht daher hier wieder durchaus eine wechselseitige Multiplikation der gleichen Glieder aller Faktoren.

Nimmt man nun erstens 2 . . . als wechselseitig multiplizirendes Glied, so erhält man aus 2 × 2 × 2 den Würfel 8 . . . . nach §. 60., oder die Zahl 8, wenn man keine Rücksicht auf ihren Generalwerth nimmt —. Betrachte ich weiter das zweyte Glied in 1) nämlich 3 . ., als multi-

plizirendes in die ersten Glieder der anderen Faktoren: so muß es sowohl mit 2 . . . in 2), als mit 2 . . . in 3), oder was dasselbe ist, mit dem Quadrate von 2 . . . multiplizirt werden. Da nun dasselbe Glied 3 . . auch in 2) und 3) vorkömmt; so muß man jenes Produkt noch zweymal, also im ganzen dreymal erhalten. Man hat also die Zahl 36 . . . . . . —. Da aber diese Multiplikation wechselseitig seyn muß; so muß auch das erste Glied in 1) nämlich 2 . . . als multiplizirendes Glied in die zweyten Glieder der andern Faktoren betrachtet werden. Man erhält folglich das Produkt aus 2 . . . in 3 . . . im Faktor 2) sowohl, als im Faktor 3), oder das Produkt aus 2 . . . in das Quadrat von 3 . . Aber dieselbe Zahl 2 . . . kömmt auch als erstes Glied in 2) und 3) vor; folglich erhält man jenes Produkt noch zweymal, also das dreyfache Produkt aus dem Quadrate von 3 . . in 2 . . ., d. i. die Zahl 54 . . . . —. Betrachtet man endlich das Glied 3 . ., als dasselbe wechselseitig zu multiplizirende Glied; so hat man den Würfel von 3 . ., oder 27 . . . . . . —.

Man hat also durch wechselseitige Multiplikation dieser 2 ersten Glieder aus allen Faktoren folgende Produktensumme:

8 . . . .
36 . . . .
54 . . . .
27 . . . .

12167 . . . . . . = dem Würfel von 23 . ., oder dem Würfel aus den zwey ersten Ziffern der gegebenen Zahl mit Rücksicht auf ihren Generalwerth.

Zweytens. Nimmt man in 1) das dritte Glied 4 ., als multiplizirendes Glied: so muß mit demselben nicht nur das zweyte Glied in 2) und 3), sondern auch das erste in diesen beyden Faktoren multiplizirt werden; man erhält also das Produkt aus 4 . in 3 . . + 2 . . . in 1) sowohl, als in 2), oder in das Quadrat dieser beyden Glieder. Da aber

eben so mit demselben Gliede 4 . in 2) dieselben ersten Glieder in 1) und 3), und mit demselben Gliede 4 . in 3) dieselben ersten Glieder in 1) und 2) multiplizirt werden müssen: so erhält man jenes Produkt im Ganzen dreymal, oder die Zahl 6348 . . . . . —.

Aber weil diese Multiplikation wechselseitig seyn, d. i. weil auch mit den beyden ersten Gliedern in 1) dasselbe dritte Glied in 2) und 3), oder das Quadrat von 4 ., und mit denselben ersten Gliedern in 2) dasselbe dritte Glied in 1) und 3), oder das Quadrat von 4 ., und endlich eben so mit den 2 ersten Gliedern in 3) dasselbe dritte Glied in 1) und 2), oder das Quadrat von 4 . multiplizirt werden muß; so erhält man wieder dasselbe Produkt 368 . . . . dreymal, oder die Zahl 1104 . . . . —.

Dasselbe dritte Glied endlich in allen drey Faktoren als wechselseitig multiplizirendes Glied betrachtet, erhält man den Würfel von 4 ., oder die Zahl 64 . . . —.

Man hat demnach folgende Produktensumme in Ansehung der dritten Ziffer mit Rücksicht auf den Generalwerth der Ziffern:

6348	. . . . .
1104	. . . .
64	. . .
645904	. . .

Drittens. Nimmt man 5, oder das 4te Glied in 1) als multiplizirendes Glied: so müssen sowohl in 2), als in 3) die drey ersten Glieder, oder, da sie dieselben in 2) und 3) sind, das Quadrat derselben mit 5 multiplizirt werden. Eben so müssen die 3 ersten Glieder in 1) und 3) mit 5 in 2), und ebendieselben in 2) und 1) mit 5 in 3) multiplizirt werden; man erhält also dasselbe Produkt wieder dreymal, oder die Zahl 821340 . . —.

Aber wegen der Wechselseitigkeit dieser Multiplikation erhält man auch das Produkt aus dem Quadrate des 4ten

Gliedes in die 3 vorhergehenden Glieder dreymal, d. i. die Zahl 17550. -.

Endlich hat man aus der wechselseitigen Multiplikation des 4ten Gliedes, in allen 3 Faktoren, mit sich selbst die Zahl 125, oder den Würfel von 5.

Hieraus hat man also folgende Produktensumme:

821340 . .
17550 .
125
82309625

Diese drey Produktensummen addirt, hat man den gesuchten Würfel aus 2345:

12	167	. . .	. . .
	645	904	. . .
	82	309	625
12	895	213	625.

Aus dieser Behandlungsart ist klar genug, daß nach ihr jedes Glied jedes Faktors mit jedem andern Gliede jedes andern Faktors multiplizirt werde.

Da nun dieses bey derselben Verfahrungsweise derselbe Fall ist, durch wieviele Ziffern auch die gegebene Zahl ausgedrückt seyn mag: so folgt, daß die vorgeschriebene Auflösung allgemeine Gültigkeit habe.

§. 65. Zusatz 1. Der oben im §. 55. für das Quadrat ausgedrückte allgemeine Satz ist also hier in Ansehung des Würfels dieser:

Die (constitutiven) Theile des Würfels jeder vielziffrigen ganzen Zahl sind 1) der Würfel jeder Ziffer, 2) das dreyfache Produkt aus dem Quadrate aller vorhergehenden Ziffern in jede folgende; 3) das dreyfache Produkt aus dem Quadrate jeder folgenden Ziffer in alle vorhergehenden Ziffern.

§. 66. Zusatz 2. Es giebt also jede folgende Ziffer der gegebenen ganzen Zahl im Würfel drey neue Zifferstellen. Theilt man daher einen gegebenen Würfel von der Rechten zur Linken so in Klassen, daß man zu jeder Klasse, die letzte ausgenommen (die auch nach §. 59. Anmerk. aus einer oder 2 Ziffern bestehen kann), drey Ziffern nimmt: so erhält man gerade so viele Klassen, als Ziffern in der Wurzel sind.

Wir haben diese Theilung im obigen letzten Beyspiele angezeigt.

Wir müssen übrigens auch hier wieder in Betreff jener 3 neuen Zifferstellen, welche jede Wurzelziffer, oder Wurzelnote, im Würfel giebt, eigends bemerken, daß man wohl unterscheiden müsse, welcher Bestandtheil die höchste, welcher die nächstniedere, und welcher die niedrigste unter jenen 3 neuen Zifferstellen gebe.

Die 3 Bestandtheile nämlich, welche jede folgende Wurzelnote beym Erheben zur 3ten Potenz giebt, sind, wie wir gesehen haben, in bestimmter Ordnung folgende: 1) das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der vorhergehenden Wurzelnoten in eben die folgende (oder, was dasselbe ist, das Produkt aus dem 3fachen Quadrate der vorhergehenden Wurzelziffern in die folgende), 2) das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der folgenden Wurzelnote in die vorhergehenden Wurzelziffern, 3) der Würfel der folgenden Wurzelnote selbst.

Wenn man im obigen Beyspiele z. B. die letzte Wurzelziffer 5 rücksichtlich ihrer Bestandtheile im Würfel betrachtet: so sieht man leicht und deutlich ein, daß ihr 3ter Bestandtheil, nämlich ihr eigener Würfel, die niedrigste Zifferstelle, oder die Stelle der Einer, als neue Stelle, geben müsse. Denn jede Potenz von einem Einer ist an und für sich wieder Einer. Allein der erste Bestandtheil, welchen 5 im Würfel giebt, ist überhaupt das Produkt aus dem Quadrate der vorhergehnden Wurzelnoten, die man als Zehner be-

trachtet, in 5, als Einer. Nun ist das Quadrat von einem Zehner an und für sich ein **Hunderter**, welcher unverändert derselbe bleibt, obgleich man noch mit Einern multiplizirt, also, wenn der 3te und letzte Bestandtheil die neue Zifferstelle der Einer giebt; so giebt nothwendig der erste Bestandtheil die neue Ziffernstelle der Hunderte. — Eben so erhellt, daß der 2te Bestandtheil die mittlere oder nächstniedere Zifferstelle geben müsse.

Anmerkung. Die Probe betreffend, erhellt von selbst, daß, wenn man die durch Erhebung einer Zahl zum Würfel erhaltene Zahl als Dignität betrachtet, die Probe dann durch Ausziehung der dritten Wurzel gemacht werden müßte. Allein betrachtet man die erhaltene Zahl blos als eine zusammengesetzte (nach §. 28. der Einl.), oder als bloses Produkt; so stellt man die Prüfung nach §. 24. und §. 25. an. Im ersten Falle erhält man zum Quotienten das Quadrat des Divisors, als der gegebenen Wurzelzahl; durch nochmalige Division dieses Quadrates durch die Wurzel wird diese selbst erhalten. — Die Neunerprobe kann so angewendet werden: den aus der Wurzel nach Wegwerfung aller Neuner erhaltenen Rest multiplizire man mit sich selbst, dann den aus diesem Produkte gesuchten Rest wieder mit dem vorigen Reste aus der Wurzel: so muß der aus diesem Produkte gesuchte Rest mit dem durch dieselbe Wegwerfung aller 9 aus dem Würfel gefundenen Reste übereinstimmen. So ist der erste Rest aus 2345 die Zahl 5, und 5 . 5 = 25: der Rest hieraus = 7, und 7 . 5 = 35; der Rest hieraus = 8 ist derselbe, den man im Würfel nach Wegwerfung aller 9 erhält.

§. 67. **Aufgabe. Aus einer gegebenen mehr als dreyziffrigen Zahl die dritte Wurzel auszuziehen.**

Auflösung. Man theile 1) die gegebene Zahl in Klassen nach §. 66. Dadurch weiß man, wieviel Wurzelziffern man finden müsse. 2) Suche man aus dem Wurzel-

täfelchen §. 63. denjenigen Würfel, welcher entweder der in der ersten Klasse zur Linken enthaltenen Zahl gleich ist, oder ihr am nächsten unter den Würfelzahlen kömmt; die diesem Würfel entsprechende Wurzelzahl setze man hinter dem gegebenen Würfel an. 3) Den aus dem Täfelchen gefundenen Würfel ziehe man von der Zahl der ersten Klasse ab, und setze, wenn eine Differenz bleibt, zu dieser die zweyte Klasse herab. Dieses Herabsetzen kann man jedesmal durch einen Punkt oder Strich in der gegebenen Zahl bemerken.

4) Aus der vorhin herabgesetzten Klasse schneide man die 2 letzten Ziffern zur Rechten ab, suche das dreyfache Quadrat der erhaltenen ersten Wurzelziffer, und dividire dadurch jene durch die unabgeschnittenen Ziffern ausgedrückte Zahl. Den Quotienten, als ganze einziffrige Zahl, setze man nach der in 2) aufgefundenen Ziffer als zweyte Wurzelziffer.

5) Man multiplizire nun a) den vorigen Divisor, als das dreyfache Quadrat der ersten Wurzelziffer, mit eben der zweyten aufgefundenen Wurzelziffer; man multiplizire b) das dreyfache Quadrat aus dieser letzten Wurzelziffer in die erste; c) man suche den Würfel der zweyten Wurzelziffer selbst. Die Summe dieser, wie in A. §. 64. untereinandergesetzten, Produkte ziehe man von der in 3) erhaltenen vollständigen Zahl ab.

6) Man setze, wie in 3), die dritte Klasse herab, und schneide wieder die 2 letzten Ziffern zur Rechten ab; suche jetzt das dreyfache Quadrat der 2 ersten gefundenen Wurzelziffern, dividire dadurch, wie in 4). Der so aufgefundene Quotient, wieder als ganze einziffrige Zahl, ist die dritte gesuchte Wurzelziffer.

7) Man multiplizire, wie in 5), den vorigen Divisor mit dieser dritten Wurzelziffer, eben so das dreyfache Quadrat von dieser mit den 2 ersten Wurzelziffern, und erhebe die dritte Wurzelziffer zum Cubus. Die Summe dieser, wie in 5), untereinandergesetzten Produkte ziehe man endlich von der in 6) erhaltenen vollständigen Zahl ab.

8) So lange nun noch Klassen da sind, fahre man auf dieselbe Art, wie in 6) und 7), fort.

9) Was wir oben unter 9) §. 56. und in der dortigen Anmerkung, in Betreff der Quadratwurzel, sagten, gilt auch hier, nur auf den Würfel und die Cubikwurzel angewendet.

Beyspiel. $\sqrt[3]{12895213625}$. Man setze, wie folgt:

Zahl. | Wurzel.

12.|895.|213.|625. | 2345

8

48,95 — 4) Div. 48 | 12 / 4, hier 3. ; 5) 36, 54, 27 = 4167

41 67

7282,13 — 6) Div. 7282 | 1587 / 4 ; 7) 6348, 1104, 64 = 645904

6459 04

823096,25 — 8) Div. 823096 | 164268 / 5 ; 8) 821340, 17550, 125 = 82309625

823096 25

0

Beweis. Was wir oben §. 56., in Rücksicht des Beweises der Auflösung zur Aufgabe, eine mehrziffrige Quadratwurzel zu finden, im Allgemeinen bemerkten, gilt auch hier.

Vergleicht man übrigens die Berechnung dieses Beyspieles mit der Art, wie dieselben Wurzelziffern 2345 zum Würfel, nach der 2ten Auflösung §. 64. erhoben wurden; so sieht man klar ein, daß die hier gegebenen Vorschriften zur Auffindung einer mehrziffrigen Cubikwurzel kurz und wahr anleiten, die Bestandtheile eines aus einer mehrziffrigen Zahl entsprungenen Würfels nachzubilden. Dieses weitläufig darzuthun, ist für den, welcher den Beweis in

§. 57 richtig gefaßt hat, völlig überflüßig. Um jedoch einigermaßen zu zeigen, daß die Erläuterung des Beweises auch hier auf eine ähnliche Art, wie wir im §. 57. gethan haben, anzustellen sey, wollen wir nur einige Fragen zugleich beantworten:

1) Warum werden aus jeder herabgesetzten Klasse die 2 letzten Ziffern zur Rechten abgeschnitten, und demnach nur die übrigen zur Linken dividirt (nach Nr. 4.)? 2) Welches ist die Art, die uns unbekannte folgende Wurzelziffer zu finden?

Dem zu Folge, was wir am Schlusse des §. 66. gesagt haben, ist es am allernatürlichsten die zweyte, und so jede folgende Wurzelziffer in dem Bestandtheile aufzusuchen, wo sie als einfacher Faktor vorkömmt. Da nun dieß der erste Bestandtheil ist, dieser aber unter den 3 neuen Zifferstellen, welche jede Wurzelnote im Würfel giebt, in der höchsten Zifferstelle enthalten gedacht werden muß: so erhellt deutlich, warum man jedesmal die 2 letzten Ziffern abschneidet, und die durch die übrigen zur Linken ausgedrückte Zahl (als das dreyfache Quadrat der vorhergehenden Wurzelziffern, mit der folgenden, oder gesuchten Wurzelnote multiplizirt,) durch eben jenes 3fache Quadrat dividirt, um die folgende gesuchte Wurzelnote zu erhalten.

Ist diese Wurzelnote aufgefunden: so bildet man die 3 Bestandtheile, welche sie im Würfel giebt, gerade so, wie beym Erheben, wieder nach, um ihre Summe abzuziehen.

Wir brauchen kaum noch hinzusetzen, daß auch hier der Schluß des Beweises §. 57., angewendet auf die Cubikwurzelausziehung, gelte.

Wir fügen nur noch einige nützliche Beyspiele zur Uebung bey:

I. | Wurzel.
195|112|000|000 | 5800 §. 62.
125
—
701,12 | 4) Div. 701 | 75 / 9, hier 8 ; 5) 600
701 12 : 960
512
—
0 70112

II. | Wurzel.
2|006,|012,|009 | 1002
1
—
60120,09 | 8) Div. 60120 | 30000 / 2 ;8)60000
60120 08 1200
8
—
R. 1 6012008

Anmerkung. Eine andere Methode, die folgenden Wurzelziffern auf einmal durch Division zu finden, will ich an den folgenden Beyspielen kurz nachweisen:

a) Quadratwurzelausziehung.

1 Quadratzahl	Wurzel	2 Quadratzahl	Wurzel
8. 64. 93	294 + $\frac{57}{585}$	1. 07. 64. 00	1037 + $\frac{1031}{2075}$
4		1	
		—	
464|$\frac{5}{58}$		076|$\frac{3}{021}$	1

3 Quadratzahl	Wurzel
4. 40. 16. 04	2098
4	
— 401|$\frac{6}{80}$,	erster Divisor = 2080.

1) Die Art, in Klassen einzutheilen, ist dieselbe, wie oben;

2) die erste Wurzelziffer wird ebenfalls auf die oben angeführte Weise gefunden;

3) nachdem man das Quadrat der ersten Wurzelziffer, nämlich 4 im 1sten Beysp., von der ersten Klassen-Zahl (8) abgezogen hat, setzt man zum Reste (4) soviele nächsten Ziffern aus der Quadratzahl, als wieviele Klassen noch üb-

rig sind. Dadurch erhält man in unseren 3 Beyspielen die Zahlen 464, 076, 401.

4) Der auf diese Art erhaltene Rest oder Unterschied wird dann durch die Differenz zwischen dem Quadrate der gefundenen Wurzelziffer und dem Quadrate der nächst grösseren Zahl dividirt In dem 1sten Beysp. sind 4 und 9 die Quadrate von 2 und 3, die Differenz ist 5, eben so im 3ten Beysp.; im 2ten Beysp. sind jene Quadrate 1 und 4 von den 2 nächsten Zahlen 1 und 2, und die Differenz ist 3.

5) Durch diese Differenz dividirt man nun die nach der Vorschrift unter 3) gesetzte Zahl (464, oder 076, oder 401). In Betreff des zu findenden Quotienten ist zu bemerken:

α) Der Quotient muß soviele Ziffern enthalten, wieviele Klassen, die erste Klasse weggerechnet, die gegebene Quadratzahl noch hat; daher muß man im 2ten und 3ten Beysp. dem Quotienten 25 und 80 eine Nulle vorn ansetzen, damit, weil man noch 3 Klassen übrig hat, der Quotient auch 3ziffrig werde.

β) Wenn ein großer Rest aus dem Dividende bleibt: so erhöht man die Quotientenzahl um Eins; sonst wird aber der Rest gar nicht in Erwägung gezogen. Im 1sten Beysp. setzt man statt 92 die Zahl 93.

6) Diese aufgefundenen Quotientenziffern werden der ersten Wurzelziffer rechts beygefügt, und die dadurch entspringende Zahl (in unseren Beyspielen nach der Ordnung die Zahl 293, dann 1025, dann 2080) wird dann der erste Divisor, wodurch man die ganze vorgegebene Quadratzahl dividirt.

7) Zwischen diesem Divisor und dem gefundenen Quotienten, als ganzer Zahl, sucht man dann die Differenz, nämlich im 1sten Beysp. 295 — 293 = 2; im 2ten Beysp. 1050 — 1025 = 25; im 3ten Beysp. 2116 — 2080 = 36;

8) Diese Differenz halbirt man, und den Quotienten, als ganze Zahl, addirt man zu dem vorigen Subtrahenden, als kleineren Zahl: so hat man sehr nahe, oder ganz genau die gesuchte Wurzel. In unseren Beyspielen sind nach 7) diese Hälften die Zahlen 1; 12: 18. Daher die Wurzeln 293 + 1; 1025 + 12 = 1037; 2080 + 18 = 2098. Diese letzte Zahl ist die ganz genaue Quadratwurzel der Zahl 4401604. Wie man aber die Brüche finde, welche man, um die Wurzel noch näher auszudrücken, dieser beyfügt, kömmt unten im §. 121. Anmerk. 3 vor.

Die Hauptgründe zu den Vorschriften von 4 — 8 sieht man zum Theile durch die Buchstabenrechnung am deutlichsten und leichtesten so ein: Von dem Quadrate $a^2 + 2ab + b^2$ ist $a + b$ die wahre Wurzel, indem man a durch $\sqrt{a^2}$, und b aus $\frac{2ab}{2a}$ so findet, wie wir schon oben ohne den Gebrauch der Buchstaben gelehrt haben.

Allein, um die zweyte Wurzelnote b, oder überhaupt die folgenden Wurzelnoten auf einmal zu finden, betrachtet man die ganze zweyte Wurzel aus einer gegebenen Quadratzahl so, als falle sie zwischen c und c + 1, das Quadrat also zwischen c^2 und $c^2 + 2c + 1$ (so fällt in unserem 3ten Beysp. die ganze gesuchte Wurzel zwischen 2000 und 3000, und das gegebene Quadrat zwischen 4000000 u. 9000000). Demnach ist c sicher die erste Wurzelnote, die man sucht, und 2c + 1 ist die Differenz zwischen jenen 2 nächsten Quadraten. Nun ist nach unserem obigen Buchstabenquadrate $c^2 = a^2$, folglich $2c = 2a$. Wenn man daher nach der Vorschrift unter 4) 2ab (als Repräsentanten der obigen Zahlen 464, 076, 401 in unseren Beyspielen) durch 2c + 1 oder 2a + 1, statt blos durch 2a dividirt: so sieht man ein, daß der Quotient, oder die zweyte Wurzelnote, etwas zu klein, demnach auch die ganze Wurzel, vorgestellt durch die nach Vorschrift 6 erhaltene Zahl, zu

klein gefunden werden müsse. Daher wird man denn auch, wenn man durch diese zu kleine Zahl die gegebene Quadratzahl dividirt, nicht wieder dieselbe Zahl (wie dieß sonst bey einem vollkommnen Quadrate und der wahren aufgefundenen Wurzel der Fall ist,) zum Quotienten erhalten; sondern man wird nothwendig eine Zahl finden, die um weniges größer ist, als die wahre gesuchte Wurzel.

Wir haben demnach nach diesen 2 Vorschriften zwey ganze, aber fehlerhafte, Zahlen gefunden, zwischen welchen sehr nahe die wahre gesuchte Wurzelnote fallen muß; — wie wenn man statt 5 die Zahlen 4 und 6 gefunden hätte. Wenn man demnach das Fehlerhafte beyder Zahlen vertheilt, indem man beyde Zahlen addirt, und die Summe durch 2 dividirt: so wird man die wahre gesuchte Zahl, als ganze Zahl, erhalten, welche Zahl nämlich die vorhin gesuchte Hälfte ist. Diese Hälfte zu finden, lehren auf eine andere, aber dasselbe Resultat nothwendig gebende, (wie man allgemein leicht beweisen kann,) Art die Vorschriften unter 7) und 8).

Aus dem Gesagten erhellt, daß diese Methode der Wurzelauszïehung auf gewißen, sicheren Gründen beruhe, daher durchaus nicht fehlerhaft seyn könne.

Zur möglichst kurzen Darstellung dieser Gründe veranlaßte mich 1) dieß, daß ich zwar in manchen älteren Schriften diese Methode beschrieben, aber nirgends bewiesen fand; 2) daß in Frankreich sich mehrere Gegner gegen diese Methode erhoben, welche der ungenannte Verfasser der Schrift „L'ecole des Arpenteurs“ (2d. edit. a Paris 1692., welche Schrift der berühmte de la Hire der Akademie der Wissensch. zur Approbation vorgelegt hatte,) ebenfalls ohne Anführung eines Grundes aufgestellt hatte. Nach mehreren Stellen in diesem Buche scheint sich dessen Verfasser als Erfinder dieser Methode, vielleicht nicht mit Unrecht, zu betrachten.

Auf ähnlichen Gründen stützt sich auch die folgende Methode

b) Der Cubikwurzelausziehung.

Beyspiel. Man soll aus 43.241. 792 die 3te Wurzel ausziehen.

1) Die Eintheilung der Zahl, so wie das Auffinden der ersten Wurzelziffer 3, und des Abziehens des Würfels 27 von 43 bleibt auch hier so, wie wir schon oben gelehrt haben.

2) Zur Differenz 16 setze man von den nächsten Ziffern der Cubikzahl soviele herab, als noch Klassen übrig sind; die so erhaltene Zahl 1624 dividire man

3) durch die Differenz des Würfels 27 und des nächst höheren 64, nämlich durch 37. Der Quotient 43 wird wegen des großen Restes um 1 vermehrt.

4) Durch die Zahl, welche man dadurch erhält, daß man den gefundenen Quotienten 44 rechts zu der ersten Wurzelziffer setzt, nämlich hier durch 344 dividire man nun die vorgegebene Wurzelzahl. Man findet den Quotienten 125702 (ohne Berücksichtigung des Restes). Denselben Quotienten dividire man dann nochmals durch dieselbe Zahl 344; so findet man die Zahl 365, welche um 28 größer ist, als der vorige Divisor.

Wäre diese Differenz kleiner 3, oder der gefundene Quotient sogar kleiner, als der Divisor: so müßte man nun die kleinere Zahl, als die gesuchte Wurzel betrachten.

5) Die nach 4) gefundene Differenz dividire man durch 3, ohne sich um den etwa bleibenden, Rest zu bekümmern, und addire den Quotienten, hier 7, zur kleineren Zahl 344: so ist 351 sehr nahe die gesuchte Wurzel. Dieses prüft man dadurch, daß man die vorgegebene Zahl mit 351, und dadurch den gefundenen Quotienten nochmals dividirt. Man findet als letzten Quotienten 350, den man, als kleinere Zahl, für die wahre Wurzel nimmt.

Wie man einen Bruch beyfügt, wird im §. 121. gelehrt.

Noch ist zu merken, daß die nach 4) erhaltene Zahl, die man versuchsweise als Wurzel betrachtet, soviel ziffrig seyn

müsse, als der Würfel Klassen hat; wenn man z. B. aus 350. 062. 755 die Wurzel ziehen soll: so findet man zuerst 7, welche Ziffer die Zahl 700 ausdrückt; da man nun nach 3) nur die Zahl 4 findet, so ist 704 die erste versuchte Wurzel.

§. 68. Probe. Diese ist durch den allgemeinen Satz des §. 63. auch für die Cubikwurzel ausgedrückt.

Anmerkung 1. Die Ausziehung der Cubikwurzel durch Näherung kömmt unten im §. 121. bey den Dezimalbrüchen vor.

Anmerkung 2. Hr. Dr. Hauff stellt am Ende seines Lehrbuches der Arithmetik (1807) für alle, wie er sich ausdrückt, welche die Arithmetik zu verstehen glauben, die Aufgabe oder Frage auf: warum ist die Differenz von zwey ganzen, mit denselben Ziffern geschriebenen, Zahlen ein Multiplum von 9?

Die Antwort auf diese Frage, auf deren Kenntniß sich Hr. Hauff etwas zu gute zu thun scheint, indem er sie seiner, eben nicht sonderlich interessanten, Aufgabe nicht beyfügte, findet man leicht aus dem bisher Abgehandelten auf doppeltem Wege:

1) Mittels der Potenzenlehre. Die Zahlen 100, 1000, 10000 u. s. w. sind nur Potenzen von 10. So wie ich mir nun 10 dadurch entstehen denken kann, daß ich zu 9 noch 1 addire: eben so kann man sich auch jede Einheit einer höheren Ordnung (100, 1000 . . .) als ein Vielfaches von 9, wozu noch 1 addirt ist, vorstellen. So ist $100 = 10^2 = (9 + 1)^2 =$ (nach §. 55.) $11 . 9 + 1$. Eben so ist $1000 = 10^2 . 10 = (11 . 9 + 1) . (9 + 1) =$ (indem man diese 2 Faktoren, wie im §. 55. untereinander setzt und, wie dort, multiplizirt) $111 . 9 + 1$. Da man nun auf gleiche Weise die 4te Potenz einer Zahl erhält, indem man ihren Würfel nochmals mit der Wurzel multiplizirt: so hat man auch $10000 = 10^4$.

$= 10^3 . 10 = (111.9 + 1).(9+1)$. Diese Multiplikation steht nach §. 55. so:

$$\begin{array}{r} 111.9+1 \\ 9+1 \\ \hline 999.9+9 \\ +111.9+1 \\ \hline 999.9+112.9+1. \end{array}$$

Man hat also die Zahl 9 in diesem Falle (999 + 112)mal, d. i. 1111mal, daher ist die Zahl $10000 = 1111.9 + 1$. Man sieht, daß auf gleiche Weise $100000 = 10^5 = 10^4 . 10 = 11111.9 + 1$ seyn müsse, u. s. w.

Wenn an der Stelle der Ziffer 1 irgend eine andere Ziffer steht, wie in 20, 300, 7000 u. s. w.: so ändert sich auch obiger Faktor von 9, der aus lauter Einheiten besteht, in einen andern, welcher durch eben soviele 2, oder 3, oder 7 ausgedrückt ist, als man vorhin Einheiten hatte, in eben diese Zahlen ändert sich auch die vorhin addirte Einheit; so ist $20 = 10.2 = (9+1).2 = 2.9+2$; und $300 = 100.3 = 10^2.3 = (11.9+1).3 = 33.9+3$; und $700 = 1000.7 = 10^3.7 = (111.9+1).7 = 777.9+7$; u. s. w.

Es ist also jede solche Zahl mit n Nullen eine Summe 1) aus dem sovielsten Multiplum von 9 als die nmal hintereinander gesetzte geltende Ziffer ausdrückt; 2) aus soviel Einheiten, als eben diese Ziffer ausdrückt.

Nun läßt sich jede andere ganze Zahl in solche bisher betrachteten Zahlen auflösen; so ist $563 = 500 + 60 + 3$: wenn demnach eine andere Zahl mit einer solchen in den Ziffern übereinstimmt, wie 356: so sind jene 2ten Summen von Einheiten gleich; folglich wird nur noch ein Multiplum von 9 von einem Multiplum von 9 abgezogen, und die Differenz muß demnach auch ein Vielfaches von 9 seyn.

So ist $\left.\begin{array}{r}482\\-284\end{array}\right\} = \left.\begin{array}{r}400+80+2\\(200+80+4)\end{array}\right\} = \begin{array}{l}44.9+8.9+4+8+2\\-(22.9+8.9+2+8+4)\end{array}$

$= \left.\begin{array}{r}44\cdot9+8\cdot9+14\\-22\cdot9+8\cdot9+14)\end{array}\right\} = 44.9-22\cdot9 = (44-22).9 = 22\cdot9$

$= 198$ die gesuchte Differenz.

2. Dieselbe Wahrheit erhellt auch schon aus der Kenntniß des Grundes der Neunerprobe.

Der gemeinen Arithmetik Dritter Theil.

Die Lehre von den Brüchen.

Einleitung.

§. 69.

Erklärung 1. Der Bruch ist überhaupt ein Theil eines Ganzen (§. 26 der Einl.). Man erhält aber, oder nimmt einen bestimmten Theil von einem Ganzen, wenn man dieses durch diejenige Zahl dividirt, welche anzeigt, den wievielsten Theil man nehmen wolle. Will man z. B. den 4ten Theil von 8; so erhält man aus der Division der Zahl 8 durch 4 die Zahl 2 zum Quotienten, oder 2 ist der 4te Theil von 8. Eben so ist $\frac{12}{3} = 4$, oder 4 ist der dritte Theil von 12.

Man nimmt aber in der Lehre von den Brüchen die Einheit als das Ganze an, und sieht demnach jeden Bruch als einen Theil an, den man von der Einheit genommen hat. Um daher einen bestimmten Bruch zu haben, dividirt man eben so, wie vorhin das Ganze, jetzt die Einheit durch diejenige Zahl, welche anzeigt, den wievielsten Theil man von ihr nehmen wolle. Will man z. B. den vierten Theil: so setzt man $\frac{1}{4}$, was man auch liest „ein Viertel"; eben so

ist der 3te Theil von 1 der Bruch $\frac{1}{3}$, oder „ein Drittel“. Die Zahl nun, wie hier 4 und 3, welche anzeigt, der wievielste Theil von der Einheit genommen sey, heißt des Bruches Nenner.

Dergleichen Brüche, wo die Einheit durch irgend eine Zahl dividirt ist, nennt man Stammbrüche. Man denkt sich nämlich die übrigen Brüche aus diesen dadurch entstehen, daß man den Stammbruch, wie die Einheit bey dem Entstehen jeder Zahl, öfterer, oder wiederholt zusammenzählt. Zähle ich z. B. $\frac{1}{4}$ nochmals, so erhalte ich $\frac{2}{4}$; zähle ich den Stammbruch dreymal zusammen; so erhalte ich $\frac{3}{4}$. Dieses wiederholte Zusammenzählen oder Addiren, ist nach §. 14. nichts, als ein Multipliziren der im Stammbruche über den Divisor geschriebenen Einheit mit derjenigen Zahl, welche mir anzeigt, wie oft der Stammbruch, oder ein bestimmter Theil der Einheit soll genommen werden. Will man z. B. den dritten Theil der Einheit zweymal, so darf man nur die Ziffer 1 in $\frac{1}{3}$ mit 2 multipliziren; so hat man den Bruch $\frac{2}{3}$.

Daher heißt denn auch die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Stammbruch wiederholt zusammengezählt, oder wie oft ein gewisser Theil der Einheit genommen sey, der Zähler des Bruches. Inwiefern man sich nun selbst die Einheit mit der Einheit multiplizirt vorstellt, heißt auch diese, in den Stammbrüchen, des Bruches Zähler.

§. 70. Zusatz 1. Der Bruch ist also nichts, als eine nur angezeigte, oder nicht wirklich vollzogene Division, welche, als blos angezeigte, schon für den aufgefundenen Quotienten gilt; weßwegen man jede Division überhaupt als einen Bruch ansehen kann. So ist $\frac{8}{4}$ ein Bruch, wo man sich den Stammbruch $\frac{1}{4}$ achtmal wiederholt oder zusammengezählt denken kann, und wo man erst durch wirkliches Dividiren die Zahl findet, welche der vierte Theil von 8 ist.

§. 71. Zusatz 2. Wie nun der Quotient eine benannte Zahl ist, sobald man den Dividend benennt; so ist auch der

Bruch (§. 70.) ein benannter, wenn ausdrücklich angegeben wird, von welcher Einheit, als dem jedesmaligen Zähler, oder Dividende des Stammbruches, die Rede sey. Ist z. B. die Rede von einem Gulden, einer Stunde, einem Fuße, so bedeutet auch der Bruch z. B. $\frac{3}{4}$ den 4ten Theil eines Gulden, einer Stunde, eines Fußes dreymal genommen.

Oder mit anderen Worten: Die Vorstellungen vom Bruche und dem Ganzen sind Verhältnißvorstellungen, (wie Vater und Sohn) deren keine ohne die andere kann gedacht werden. Weßwegen man auch jeden kleineren Theil irgend eines benannten Ganzen in eben diesem Ganzen in Bruchgestalt ausdrücken kann; z. B. 1 Kreutzer $= \frac{1}{60}$ Gulden, $= \frac{1}{90}$ Thaler; 1 Fuß $= \frac{1}{12}$ Ruthe; 1 Stunde $= \frac{1}{24}$ Tag u. s. w. Da wir es nun nicht immer mit Ganzen, sondern auch mit ihren Theilen beym Rechnen können zu thun haben: so sieht man ein, daß die Lehre von den Brüchen ein unentbehrlicher Theil zur Vollständigkeit der Rechenkunst seyn müsse.

Ferner erhellt, daß auch die benannten abgeleiteten Brüche, wie die unbenannten, eine doppelte Operation zu ihrer Bildung fodern; sie können nämlich nur durch Division des benannten Ganzen und durch Multiplikation entstehen. Wenn man z. B. spricht $\frac{3}{4}$ Gulden: so muß man sich zuerst den Gulden, als Einheit, in 4 gleiche Theile getheilt vorstellen; weiter muß man sich diesen 4ten Theil eines Gulden 3mal zu sich selbst addirt, oder mit 3 multiplizirt denken. Dadurch bekömmt man erst die wahre Bedeutung des benannten Bruches $\frac{3}{4}$ Gulden. Wüßte man daher immer sogleich den Werth eines benannten Stammbruches in kleineren Theilen oder Sorten anzugeben: so wüßte man auch die Bedeutung des abgeleiteten benannten Bruches in eben diesen Theilen oder Sorten. So ist $\frac{1}{4}$ Gulden $= 15$ Kreutzern oder $= 3$ Batzen, daher $\frac{3}{4}$ Gulden $= 15 . 3 = 45$ Kreutzern, $= 3 . 3 = 9$ Batzen.

§. 72. Erklärung 2. Denjenigen Bruch, welcher die Einheit nicht enthält, oder welcher von ihr wirklich ein

Theil ist, so, daß man den Stammbruch einmal, oder wiederholt zu sich addiren muß, bis sein Zähler dem Nenner gleich ist, nennt man einen **wahren, eigentlichen** oder **ächten** Bruch. Enthält aber der Bruch, als Quotient, die Einheit einmal oder mehrmals, d. i. ist entweder der Zähler des Bruches gleich dem Nenner, oder größer, als dieser: so heißt der Bruch ein **unächter, uneigentlicher,** oder **Bastardbruch**; weil er dann nicht wirklich ein Theil der Einheit ist, wie es der Bruch seyn soll (§. 69.). So ist $\frac{3}{4}$, oder $\frac{2}{7}$ ein ächter; aber $\frac{8}{4}$, oder $\frac{4}{4}$ ein unächter Bruch. Letzterer ist ein blos veränderter Ausdruck der Einheit.

So muß der Arithmetiker unterscheiden, wenn er nicht die Lehre von der Division in ganzen Zahlen mit der Lehre von den Brüchen vermischen will, indem man jede auch nur angezeigte Division zweyer Zahlen als Bruch betrachten kann (§. 70.).

§. 73. **Erklärung** 3. Die aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruche, der mit dieser durch das Zeichen der Addition verbunden ist, bestehende Zahl, heißt eine **gemischte Zahl**; z. B. $2 + \frac{2}{3}$. Man schreibt dieß auch kurz durch $2\frac{2}{3}$.

§. 74. **Zusatz**. Dividirt man den Zähler des unächten Bruches wirklich durch dessen Nenner: so erhält man entweder eine ganze oder gemischte Zahl zum Quotienten. Denn entweder ist nach §. 70. der Stammbruch so oft zusammengezählt worden, (was der Zähler ausdrückt (§. 69.)) daß dieser blos ein Vielfaches (§. 13.) des Nenners ist; oder der Stammbruch wurde über dieses Vielfache noch mehrmals wiederholt. Im ersten Falle ist der Quotient eine ganze Zahl, im zweyten eine gemischte (§. 73.). Z. B. in dem uneigentlichen Bruche $\frac{8}{4}$ ist der Stammbruch $\frac{1}{4}$ achtmal zusammengezählt, oder der Zähler 8 ist das Zweyfache vom Nenner 4; d. i. der Quotient ist 2. Aber im unächten Bruche $\frac{13}{3} = \frac{12 + 1}{3}$ ist der Stammbruch über das Vierfache vom Nenner 3 noch einmal wiederholt, folglich ist der Quotient $4 + \frac{1}{3}$.

Man verwandelt also einen unächten Bruch durch wirkliches Dividiren in eine ganze oder gemischte Zahl.

Anmerkung. Hieraus in Verbindung mit dem Satze, daß der bey der Division ganzer Zahlen gelassene Rest kleiner seyn müsse, als der Divisor (man sehe den Beweis in §. 36.), erhellt deutlich, daß der vollständige Quotient aus der Division ganzer Zahlen, die einen Rest läßt, eine gemischte Zahl sey. So ist der vollständige Quotient im Beyspiel des §. 36. die gemischte Zahl 8709 $+ \frac{4}{5}$.

§. 75. **Aufgabe 1. Einen Bruch auf einen kürzeren, oder auf den kürzesten Ausdruck zurückezubringen, ohne seinen Werth zu verändern.**

Auflösung. Man dividire sowohl Zähler, als Nenner durch das gemeinschaftliche, oder durch das gemeinschaftlich-größte Maß (§§. 40. 41. vergl. mit §. 45.)

Beyspiel. $\frac{12}{16} = \frac{6}{8}$; $\frac{8}{16} = \frac{4}{8}$; indem man durch das gemeinschaftliche Maß $= 2$ dividirt. Aber durch die gemeinschaftlich-größten Maße 4 und 8 wird $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, und $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, wodurch man die kürzesten Ausdrücke hat (§. 44).

Beweis. Diese Reduktion ist nichts, als ein gesetzmäßiges Verwandeln vielfacher Zahlen in ihre gleich-einfache; folglich ist sie gültig (§. 43.).

§. 76 **Aufgabe 2. Einen Bruch in einen andern gleichen Werthes, aber vom gegebenen Nenner, zu verwandeln.**

Auflösung. Man multiplizire sowohl den Zähler, als den Nenner des Bruches mit derjenigen Zahl, welche mit dem Nenner, als anderm Faktor, ein Produkt giebt, das dem gegebenen Nenner gleich ist.

Beyspiel. Es sey $\frac{3}{4}$ in einen Bruch gleichen Werthes, dessen Nenner 20 seyn soll, zu verwandeln. Da hier 5 die Zahl ist, welche mit dem Nenner 4 multiplizirt, dem

Nenner 20 gleich wird; so ist der verwandelte Bruch gleichen Werthes $= \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$.

Sollte aber der neue Nenner eine größere Zahl seyn, so, daß man nicht sogleich den Faktor wissen könnte, womit der Zähler und Nenner des Bruches multiplizirt werden müßte: so sucht man jenen Faktor dadurch, daß man den neuen Nenner durch den alten Nenner dividirt, und mit dem erhaltenen Quotienten den Zähler multiplizirt.

Beyspiel. $\frac{3}{4}$ sey in den gleichen Bruch mit dem neuen Nenner 356 zu verwandeln. Da nun $\frac{356}{4} = 89$ ist; so ist der neue Bruch $= \frac{3 \cdot 89}{4 \cdot 89} = \frac{267}{356}$.

Beweis. Zähler und Nenner des letzten Bruches sind nur die Gleichvielfachen vom ersten gegebenen Bruche (§. 42.), folglich beyde Brüche gleichen Werthes (§. 48.).

§. 77. Zusatz 1. Aus der vorgeschriebenen Art, diese Aufgabe zu lösen, ist deutlich, daß ihre Auflösung nur dann möglich sey, wenn der gegebene Nenner entweder keine Primzahl ist, oder derselbe und der Nenner des Bruches relative Primzahlen sind (§. 42.). So ist der Bruch $\frac{3}{4}$ weder in den mit dem gegebenen Nenner 13, weder in den vom Nenner 14 zu verwandeln.

§. 78. Zusatz 2. Da jede ganze Zahl schon für sich den uneigentlichen Bruch, dessen Zähler die ganze Zahl, und dessen Nenner die Einheit ist (§. 33.), vorstellt, die Einheit aber als Faktor jeder Zahl betrachtet werden kann (§. 16.): so sieht man ein, daß man jede ganze Zahl in einen Bruch von irgend einem gegebenen Nenner nach §. 76. verwandeln könne, ohne ihren Werth zu verändern. So ist $4 = \frac{4}{1} = \frac{4 \cdot 14}{14} = \frac{4 \cdot 13}{13}$.

§. 79. Aufgabe 3. Brüche von verschiedenen Nennern in Brüche gleichen Werthes, aber mit einerley Nenner zu verwandeln.

Auflösung. Man multiplizire jeden Zähler mit den Nennern der andern Brüche, und schreibe jedem dieser Produkte mittels des Divisionszeichens das Faktum aus allen Nennern unter.

Beyspiel. $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ seyen so zu verwandeln; so hat man aus dem Bruche $\frac{3}{4}$ durch Multiplikation mit dem andern Nenner 3 den Bruch $\frac{9}{12}$, und aus $\frac{2}{3}$ durch Multiplikation mit 4, den Bruch $\frac{8}{12}$, d. i. 2 Brüche von einerley Nenner. Eben so hat man aus den Brüchen $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$ die Brüche $\frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 5}$; $\frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5}$; $\frac{4 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3}$, oder die Brüche $\frac{45}{60}$; $\frac{40}{60}$ $\frac{48}{60}$.

Beweis. Da hier sowohl der Zähler, als der Nenner jedes Bruches durch dieselbe Zahl multiplizirt wird (so wird 3 durch 15, aber auch 4 durch 15; 2 sowohl als 3 durch 20; 4 sowohl, als 5 durch 12 multiplizirt): so werden durch dieses Verfahren nur die einfachen Zahlen in die gleichvielfachen (§. 42.) verwandelt. Diese geben aber nach §. 43. dieselben Quotienten, wie jene, folglich sind die nach dieser Vorschrift verwandelten Brüche gleichen Werthes mit den gegebenen, als einfache Zahlen betrachtet.

§. 80. Zusatz 1. Sind die Nenner der Brüche, welche in andere von einerley Nennern verwandelt werden sollen, so beschaffen, daß man jeden kleineren in den größten Nenner verwandeln kann: so löst man die vorige Aufgabe auf eine kürzere Art nach § 76.

Beyspiel $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{16}$. Da 4 . 4 auch = 16, und 2 . 8 = 16; so hat man statt jener Brüche folgende gleichen Werthes, $\frac{12}{16}$; $\frac{8}{16}$; $\frac{5}{16}$, aber itzt unter demselben Nenner, oder mit derselben Benennung.

§. 81. Zusatz 2. Um mehreren Brüchen einen gemeinschaftlichen Nenner zu verschaffen, und sie zugleich möglichst kurz auszudrücken, verfährt man auf folgende Weise:

Da die Nenner als Divisoren betrachtet werden können, daher das Produkt aus den Nennern, als gemeinschaft-

licher Nenner, nichts anders ist, als der gemeinschaftliche Dividend: so wird man die Brüche mit einerley Nenner und zugleich am kürzesten darstellen, wenn man nach §. 46. den kleinsten Dividend sucht.

Beyspiel 1. Man habe die Brüche $\frac{1}{24}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{8}{25}$, oder

Beyspiel 2. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{17}{48}$, $\frac{19}{72}$. Im Beysp. 1. ist nach §. 46. der kleinste gemeinschaftliche Dividend oder der kleinste Generalnenner die Zahl 1800; im Beysp. 2. lasse man 3, 4, 5, 8, 9, 12, 24, weil sie in den größeren Nennern als Maße enthalten sind, ganz weg, und setze statt 7, 40, 48, 72 die Faktoren 7, 5.2.2.2, 2.3.2.2.2, 2.2.2.3.3, so sieht man, daß das Produkt aus den Faktoren 7.5.3.3.2.2.2.2 den kleinsten Generalnenner = 5040 gebe.

Um nun aber die neuen Zähler zu diesen neuen Generalnennern zu finden, muß man nach §. 76. verfahren, indem man nämlich den Generalnenner 1800 durch den Nenner eines jeden Bruches dividirt, und den Quotienten mit des Bruchs Zähler multiplizirt, erhält man die neuen Zähler: 225, 1400, 1500, 1200, 480, 576; und für den Generalnenner 5040 eben so die neuen Nenner: 3360, 1260, 3024, 3600, 1890, 3920, 4620, 1470, 378, 1785, 1330.

§. 82. Bestimmung des Werthes der ächten Brüche.

Die Einheit hier als Ganzes betrachtet (§. 69.), und den Bruch mit ihr verglichen, gilt als Grundsatz: der Bruch ist um so kleiner, je größer der Nenner im Vergleich mit dem Zähler ist. Denn dadurch wird der Bruch ein sehr kleiner Theil der Einheit. Ist ferner die Einheit benannt: so wird der Bruch um so kleiner, je weniger Einheiten niederer Art die benannte Einheit unter sich hat; so ist $\frac{1}{6}$ Gulden zwar ein Bruch vom geringen, aber noch nicht zu verachtenden Werthe; aber $\frac{1}{6}$ Heller ein Bruch von weit geringerem Werthe.

Will man daher einen Bruch bey Rechnungen vernachlässigen: so müssen der Nenner und die Einheit, als benannte, berücksichtigt werden.

§. 83. Zusatz 1. Auf die vorige Werthsbestimmung des Bruches gründet sich die der Brüche, miteinander verglichen.

Es ist nämlich 1), wenn Brüche denselben Nenner haben, derjenige Bruch der größere, welcher den größten Zähler hat. Denn in diesem Bruche ist derselbe Stammbruch mehrmals, als in dem andern, wiederholt, kömmt folglich der Einheit näher, oder er ist ein größerer Theil von ihr (§. 69.); so ist $\frac{3}{4}$ größer, als $\frac{1}{4}$, oder als $\frac{2}{4}$.

2. Sind aber die Zähler der Brüche gleich: so ist derjenige Bruch der größere, welcher den kleinsten Nenner hat. Denn in diesem wird die Einheit in wenigere Theile getheilt vorgestellt, als in den andern Brüchen; der Bruch ist folglich wieder ein größerer Theil der Einheit; so ist der Bruch $\frac{3}{4}$ größer, als $\frac{3}{8}$, oder als $\frac{3}{16}$. Ueberhaupt tritt hier der Satz ein: daß bey demselben Dividende der Quotient um so größer sey, je kleiner der Divisor ist.

§. 84. Zusatz. Will man daher den Werth eines Bruches im Vergleiche mit einem andern überhaupt bestimmen: so darf man beyde Brüche nur nach §. 79. auf einerley Benennung zurückeführen; z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ könnten irrigerweise leicht für Brüche gleichen Werthes gehalten werden, weil man zu jedem Zähler nur 1 addiren muß, um die Einheit zu erzeugen. Allein, verwandelt in die Brüche $\frac{10}{15}$ und $\frac{12}{15}$, sieht man sogleich, daß letzterer Bruch größer ist, als der erstere.

§. 85. **Eintheilung der Brüche.** — Die Brüche werden in gemeine, oder höhere Brüche eingetheilt, je nachdem ihre Nenner entweder keinem bestimmten Gesetze folgen, oder nur nach einem solchen Gesetze fortgehen.

Zu den gemeinen Brüchen gehören demnach die Brüche, welche durch die Theilung der Einheit ohne bestimmtes Gesetz entstehen.

Zu den nicht gemeinen Brüchen rechnet man 1) die Dezimal- oder zehntheilig gebrochene Zahlen, wo die Theilung der Einheit durch das dekadische Gesetz bestimmt ist; es sind nämlich die, von uns in den §§. 19 — 21 der Einleitung betrachteten, Zahlen, welche man erhält, wenn man eine Zahl um das 10, 100, oder 1000fache, d. i. nach dem dekadischen Gesetze vermindert, nichts anders, als zehntheilige Brüche; 2) die Sexagesimalbrüche, oder sechzigtheilig gebrochene Zahlen, wo die Einheit immer nach dem Gesetze von 60 getheilt wird; 3) die stetigen Brüche oder Kettenbrüche, welche nichts sind, als Reihen gemeiner Brüche, so untereinander verbunden, daß mit dem Nenner eines jeden vorhergehenden Bruches immer wieder ein neuer Bruch durch + oder — verknüpft ist, z. B.

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}.$$

Allein die Betrachtung dieser Brüche gehört nicht zur gemeinen Arithmetik; wir haben die Behandlung und den Nutzen dieser Brüche in einer eigenen Abhandlung: „Fractionum continuarum theoria et usus" Wirceb. 1810. dargestellt. Man sieht jedoch die Entstehungsart solcher Brüche leicht ein: Man habe z. B. den gemeinen Bruch $\frac{68}{157}$, den man gerne kürzer ausdrücken möchte. Man nehme 68 als gemeinschaftliches Maß, wodurch man sowohl Zähler, als Nenner dividirt: so bekömmt man $\frac{68}{157} = \cfrac{1}{2 + \frac{21}{68}}$. Nun ist aber, wenn man 21 zum gemeinschaftlichen Maß nimmt, $\frac{21}{68} = \cfrac{1}{3 + \frac{5}{21}}$; so auch $\frac{5}{21} = \cfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}$ u. s. w. Der angegebene gemeine Bruch ist also genau gleich dem obigen Kettenbruche. Zugleich erhellt, daß man, wenn statt $\frac{68}{157}$

der Bruch $\frac{1}{2}$ genommen wird, einen Fehler durch Zuviel, aber einen Fehler durch zu wenig begehen würde, wenn man für $\frac{68}{157}$ setzte: $\frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$ oder $\frac{2}{7}$; daß man sich indessen immer mehr dem wahren Bruchwerthe nähere, je mehrere jener Glieder des stetigen Bruches summirt werden.

Der Lehre von den Brüchen Erster Abschnitt.

Von den gemeinen Brüchen.

---

§. 86. Aufgabe 1. Brüche zu addiren.

Auflösung. Man addire, wenn sie einerley Nenner haben, nach §. 2. ihre Zähler, die Summe von diesen durch denselben Nenner dividirt, ist die gesuchte Summe der Brüche.

Haben daher die Brüche nicht alle denselben Nenner: so führe man sie erst auf dieselbe Benennung nach §. 79, 80, 81 zurücke, und verfahre, wie vorher.

Beyspiel. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$; und $\frac{3}{5} + \frac{1}{8} = \frac{24 + 5}{40} = \frac{29}{40}$.

Man sieht leicht ein, daß, wenn man auf dieselbe Weise die vielen Brüche in den Beyspielen des §. 81. addiren wollte, viel Schwieriges überwunden werden müßte. Hat man aber nach der nachgewiesenen Methode den Generalnenner, so wie die neuen Zähler gefunden: so darf man nur der Summe der Zahlen 225, 1400 rc., oder der Zahlen 3360, 1260 rc. den kleinsten Generalnenner 1800, oder 5040 unterschreiben, um alle gegebene Brüche auf einen, ächten oder unächten, Bruch zu bringen.

Beweis. Es ist diese Verfahrungsart für sich selbst klar, so wie die der folgenden Aufgabe.

§. 87. Zusatz. Sollen eine ganze Zahl und ein Bruch addirt werden: so verwandelt man die ganze Zahl in einen Bruch (§. 78.), der denselben Nenner, wie der andere Bruch, hat, und verfährt nach §. 86. So ist $2 + \frac{3}{7} = \frac{14}{7} + \frac{3}{7} = \frac{17}{7}$; oder man multiplizire die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, addire dazu den Zähler, und schreibe denselben Nenner unter.

§. 88. Aufgabe 2. Einen kleineren Bruch von einem größeren abzuziehen.

Auflösung. Man subtrahirt, wie vorhin, den kleineren Zähler vom größeren nach §. 8., wenn die Brüche einerley Nenner haben, die Differenz bekömmt dann denselben Nenner.

Haben aber die gegebenen Brüche nicht einerley Nenner: so muß man ihnen erst, wie oben, einerley Benennung verschaffen.

Beyspiele. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$; oder $\frac{4}{5} - \frac{2}{15} = \frac{12}{15} - \frac{2}{15}$ (§. 79.) $= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ (§. 75.).

§. 89. Zusatz. Um einen Bruch von einer ganzen Zahl abzuziehen, verwandle man die ganze Zahl in einen Bruch (§. 78.), welcher den Nenner des Bruches zum eigenen Nenner hat, und verfahre dann, wie vorher. Es ist z. B. $6 - \frac{4}{9} = \frac{54}{9} - \frac{4}{9} = \frac{54 - 4}{9} = \frac{50}{9} = 5 + \frac{5}{9}$ (§. 74.); oder kurz: man multiplizire die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, und ziehe dessen Zähler ab; der Unterschied bekömmt denselben Nenner.

§. 90. Aufgabe 3. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliziren.

Auflösung. Man multiplizire des Bruchs Zähler mit der ganzen Zahl, und schreibe dem Faktum den Nenner des Bruches unter.

Beyspiel. $\frac{3}{5} \times 4 = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

Beweis. Der Bruch ist nach dem Gesetze der ganzen Zahl wiederholt zu addiren. Nun geschieht dieses nach §. 86. dadurch, daß man blos den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl multiplizirt, und den Nenner unverändert stehen läßt; also ist die gegebene Regel wahr. Statt nämlich in unserem Falle zu setzen: $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3 + 3 + 3 + 3}{5}$ nach §. 86, ist dieses offenbar nach dem Begriffe von Multiplikation dasselbe, als wenn man setzt $\frac{3 \cdot 4}{5}$.

Auch ist hier die ganze Zahl, als Multiplikator, ihrer Natur nach unbenannt.

Zusatz. Das Produkt wird also in diesem Falle, wie gewöhnlich, größer, als der Multiplikand.

§ 91. **Aufgabe 4. Eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliziren.**

Auflösung. Man verfahre nach der Auflösung des §. 90.

Beyspiel. $4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

Beweis. 1) Dieselben Faktoren geben dasselbe Produkt, wie sie auch untereinander gesetzt werden mögen (§. 14.); 2) da hier der Multiplikator ein Bruch ist, dieser aber überhaupt einen Dividenden mit seinem Divisor nach §. 70. vorstellt: so hat hier der Begriff von Multiplikation, als einer wiederholten Addition des Multiplikands nicht statt. Sondern eine ganze Zahl mit einem Bruche multipliziren, heißt vielmehr, man solle die ganze Zahl, welche hier des Ganzen Stelle überhaupt vertritt, erst in solche Theile theilen, welche der Nenner des Bruches anzeigt, und dann diese Theile nach dem Gesetze des Zählers wiederholt zu sich addiren (§. 71.). In unserem Beyspiele müßte man also zuerst setzen $\frac{4}{5}$, und dann $\frac{4}{5} \times 3 = \frac{12}{5}$.

§. 92. **Zusatz.** Die Multiplikation verwandelt sich also in diesem Falle in ein Nehmen eines Bruches von der ganzen Zahl, oder fällt ganz mit der Operation zusammen, durch welche man einen abgeleiteten Bruch (§. 69.) erhält. Zu:

gleich sehen wir ein, daß bey dieser Multiplikation das erzeugte Faktum jederzeit kleiner seyn müsse, als der Multiplikand, so oft der Multiplikator ein ächter Bruch ist; — gerade so, wie der erzeugte Bruch kleiner ist, als das Ganze, wenn ich den 4t. oder 5t. Theil von diesem Ganzen nehme.

§. 93. Aufgabe 5. Bruch mit Bruch zu multipliziren.

Auflösung. Man multiplizire Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner, und mache das letzte Produkt zum Nenner des ersten.

Beyspiel. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Beweis. Da auch hier der Multiplikator ein Bruch ist: so bekömmt diese Multiplikation wieder die Bedeutung des Nehmens eines Bruches vom Bruche, oder man soll nach dem Gesetze des zweyten Bruches einen neuen Bruch von dem ersten gegebenen Bruche gerade so ableiten, wie man von irgend einem Ganzen, oder einer ganzen Zahl, einen bestimmten Bruch nimmt. In unserem Falle enthält nun der Multiplikand das Ganze schon in gewisse Theile (im Beyspiele in Drittel) getheilt; der Nenner des Multiplikators sagt also, um wievielmal kleiner diese Theile zu nehmen seyen, oder daß hier aus Dritteln Fünfzehntel gemacht werden sollen, was durch Multiplikation beyder Nenner geschieht. Der Zähler des Multiplikators zeigt an, wie oft diese so erhaltenen $\frac{2}{15}$ zu sich addirt werden sollen; was nach §. 90. durch Multiplikation der Zähler geschieht.

Zusatz. Wir sehen demnach auch hier wieder ein, warum bey dieser Art von Multiplikation, sobald von ächten Brüchen die Rede ist, das Produkt abermals kleiner werden müsse, als der Multiplikand, oder auch als der Multiplikator, indem man auch den ersten Bruch vom zweyten genommen betrachten kann; so ist $\frac{2}{5}$ sowohl kleiner, als $\frac{2}{3}$, als auch kleiner, wie $\frac{3}{5}$ (§. 83.).

§. 94. **Aufgabe 6. Gemischte Zahlen miteinander zu multipliziren.**

Auflösung. Man bringe den gemischten Faktor nach §. 87. auf einen uneigentlichen Bruch, und verfahre dann nach den bisherigen Auflösungen.

Beyspiel. $2\frac{3}{4} \times 3 = \frac{11}{4} \times 3 = \frac{33}{4}$, §. 90; eben so $4\frac{5}{7} \times 2\frac{8}{9} = \frac{33}{7} \times \frac{26}{9} = \frac{858}{63}$ §. 93.

§. 95. **Aufgabe 7. Brüche durcheinander zu dividiren.**

Auflösung. Man multiplizire den Dividend durch den umgekehrten Divisor nach §. 93.

Beyspiel. $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{8}$.

Beweis. Da die Division überhaupt eine wiederholte Subtraktion ist (§. 27.), das Subtrahiren aber bey Brüchen von gleichen Nennern blos in den Zählern geschieht (§. 88.): so folgt, daß der Quotient aus der Division von Brüchen, die einerley Nenner haben, der Zahl gleich sey, welche anzeigt, wie oft der Zähler des Divisors im Zähler des Dividends enthalten ist. Dividirt man z. B. $\frac{2}{4}$ durch $\frac{1}{4}$, so ist offenbar $\frac{1}{4}$ in $\frac{2}{4}$, wie 1 in 2, zweymal enthalten. Es ist also in diesem Falle eben so viel, als dividirte man den Zähler des Dividends durch den Zähler des Divisors, mit Weglassung des gleichen Nenners. Haben daher Brüche nicht einerley Nenner: so müßte man sie auf dieselbe Benennung (nach §. 79.) bringen, d. i. den Zähler des ersten Bruches durch den Nenner des zweyten, und den Zähler des zweyten durch den Zähler des ersten Bruches multipliziren, und dann mit Weglassung des gemeinschaftlichen Nenners blos das erstere Produkt durch das letztere dividiren. Nun ist aber dieses Verfahren im Grunde dasselbe mit dem, welches in der Auflösung angegeben ist, also ist diese wahr. So ist $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{21}{28} : \frac{8}{28} = \frac{21}{8}$. Der gleiche Nenner nämlich kann offenbar keinen Unterschied in Betreff des Quotienten machen.

§. 96. Zusatz 1. Man dividirt also eine ganze Zahl durch einen Bruch, wenn man dem Produkte aus der ganzen Zahl in den Nenner des Bruchs dessen Zähler als Nenner untersetzt. So ist $3 : \frac{3}{4} = \frac{12}{3}$ $(= 4)$. Denn jede ganze Zahl hat die Einheit zum Nenner (§. 33.) Da aber, wie man sich kurz ausdrückt, 1 nicht multiplizirt, so erhält man, indem man nach §. 95. verfährt, blos den Zähler des Bruches zum Nenner. Es ist nämlich hier $3 : \frac{3}{4} = \frac{3}{1} : \frac{3}{4} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{3}$.

§. 97. Zusatz 2. Schon aus dem vorigen Zusatze leuchtet ein, daß der Quotient aus einem Bruche, durch eine ganze Zahl dividirt, müsse erhalten werden, wenn man dem Zähler des Bruches das Produkt aus dessen Nenner in die ganze Zahl als Nenner unterschreibt, oder es ist $\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4} : \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$.

§. 98. Zusatz 3. Kömmt eine gemischte Zahl als Dividend, oder als Divisor vor, oder sind auch beyde gemischte Zahlen: so verwandelt man sie, nach §. 87., in uneigentliche Brüche, und dividirt, wie vorhin. Z. B. $(3 + \frac{2}{3}) : (4 + \frac{2}{7}) = \frac{11}{3} : \frac{30}{7} = \frac{77}{90}$ (§. 95.).

§. 99. Zusatz 4. Der Quotient aus einer ganzen Zahl, dividirt durch einen ächten Bruch, ist größer, als der Dividend. Denn die ganze Zahl durch 1 dividirt, giebt dieselbe Zahl zum Quotienten (§. 33.); folglich muß der Quotient aus der ganzen Zahl durch einen ächten Bruch, welcher kleiner ist, als die Einheit, größer seyn, als die ganze Zahl.

§. 100. Aufgabe 8. Einen gegebenen Bruch zur zweyten oder dritten Dignität zu erheben.

Auflösung. Man erhebe sowohl den Nenner, als den Zähler des Bruches zur geforderten Dignität nach den Auflösungen der hier einschlagenden Aufgaben des ersten und zweyten Abschnittes der Lehre von den Potenzen.

Beyspiel. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$; oder $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$.

Beweis. Dieser ist durch die Erklärung der Potenzen (§. 47.) in Vergleich mit §. 93. gegeben.

§. 101. Zusatz. Man zieht also die bestimmte Wurzel aus einem Bruche, wenn man sie sowohl aus dem Zähler, als Nenner auszieht. Z. B. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$.

Anmerkung 1. Verlangte man bestimmt anzugeben, welchen Werth, oder welche Größe benannter Art ein ächter benannter Bruch ausdrücke: so dürfte man nur die Einheit, von welcher im Bruche die Rede ist, einer Zahl niederer Art gleichsetzen, diese durch den Nenner des Bruches dividiren, und diesen Quotienten nach dem Gesetze des Zählers nehmen, oder multipliziren (§. 69.). Z. B. Es bedeute der Bruch $\frac{3}{4}$ den benannten Bruch $\frac{3}{4}$ Gulden; so ist 1 Gulden = 60 Kreuzern. Aber $\frac{60}{4} = 15$, und $15 \times 3 = 45$; folglich $\frac{3}{4}$ Gulden = 45 Kreuzer.

Anmerkung 2. Kommen Brüche, wie diese: $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{3}$; oder $\frac{\frac{4}{5}}{3}$; $\frac{\frac{13}{5}}{6}$; oder $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ u. s. w. vor; so werden diese verständlich, wenn man sie nach der Art, wie wir dergleichen Brüche zusammenstellten, folgendermaßen (resp.) schreibt: $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ (§. 93.) = [illegible] $= \frac{1}{4}$; und $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15}$; ferner $\frac{13}{5} : 6 = \frac{13}{30}$ (§. 98.); endlich $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (§. 95.).

Anmerkung 3. Die Alten lehrten nebst den abgehandelten Methoden, die Brüche zu behandeln, noch eine eigene Operation, welche sie die Insition nannten. Diese Operation, einfach genommen, war nichts anders, als die Addition eines Bruches vom Bruche zu einem Bruche. Wenn sie z. B. schrieben $\frac{2}{3} . \frac{1}{4}$ und die Insition verlang-

ten: so hieß dieß entweder nach unserer Schreibart ($\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$) + $\frac{3}{4}$, oder ($\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$) + $\frac{3}{4}$, d. i. man solle entweder $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$ zu $\frac{3}{4}$, oder die $\frac{2}{3}$ vom ganzen Bruche $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ addiren. Die Insition im ersten Sinne giebt (da $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$ genommen, $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$ (§ 93.) $= \frac{2}{12}$ ist) $\frac{11}{12}$ (§. 86.), die zweyte Insition giebt $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$. Der ersten Art von Insition (für welche sie die Regel geben: man multiplizire den Zähler des letzten Bruches mit dem Nenner des ersten, und addire zum Produkte den Zähler desselben ersten Bruches; diesem Zähler schreibe man das Produkt aus beyden Nennern als Nenner unter) bedienten sich die Alten, z. B. Clavius (in seinem Epitome arithm. pract. Romae 1585) bey der Division einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl. Man soll z. B. $20\frac{1}{4}$ durch 12 dividiren; hier ist 1) $\frac{20}{12} = 1\frac{8}{12}$. Nun müßte 2) auch $\frac{1}{4}$ durch 12 dividirt, und der Quotient zu $\frac{8}{12}$ addirt werden. Da aber $\frac{1}{4}$, durch 12 dividirt, eben soviel ist, als das 4tel von $\frac{1}{12}$; so kann man nach der Insition kurz setzen: $\frac{1}{4} . \frac{8}{12} = \frac{33}{48} = \frac{11}{16}$; also ist der ganze Quotient $= 1\frac{11}{16}$. Eben so ist $100\frac{5}{6} : 8 = 12 + \frac{5}{6} . \frac{4}{8} =$ (nach der Insitionsregel) $12\frac{29}{48}$. Hiebey dürfen Brüche, wie $\frac{4}{8}$, nicht reduzirt werden. Von der 2ten Art der Insition behauptet Clavius, daß sie bey den geometrischen Progressionen von Nutzen sey.

Der Lehre von den Brüchen

Zweyter Abschnitt.

Von den zehntheiligen Brüchen.

---

§. 102. **Erklärung.** Man kann auch die Dezimalbrüche (§. 85) dadurch von allen übrigen Brüchen unterscheiden, daß man sagt, Dezimalbrüche seyen solche Brüche, deren Nenner lauter ganze Potenzen von 10 sind. Diese Nenner sind nämlich 10 ($= 10^1$), oder 100 $= 10^2$, oder 1000 $= 10^3$ u. s. w. Wenn man diese Nenner eigends beysetzt: so bekömmt der zehntheilige Bruch die Gestalt eines gemeinen Bruches, oder kann in diesen verwandelt gedacht werden; so ist 0,3 $= \frac{3}{10}$; 0,04 $= \frac{4}{100}$, indem man nämlich gerade so schreibt, wie man die Brüche liest.

Man pflegt übrigens noch zwischen **Dezimalbruch** und **Dezimalzahl** zu unterscheiden, unter welcher letzteren eine mehrziffrige Zahl verstanden wird, welche entweder mehrere einzelne Dezimalbrüche, oder nebst diesen auch noch ganze Zahlen enthält; z. B. 0,34 enthält eigentlich vereinigt zwey Dezimalbrüche, nämlich 0,3 oder 3 Zehntel, und 0,04 oder 4 Hundertel; — eben so enthält die Zahl 5,34 nebst jenen Brüchen auch noch die Einheit, oder das Ganze. Die Ziffern 3,4, wodurch die einzelnen Dezimalbrüche bezeichnet werden, heißen **Dezimalziffern**, zum Unterschiede der Ziffern der Ganzen.

Die Numeration der zehntheiligen Zahlen, oder das Anschreiben und Aussprechen derselben haben wir schon in der Einleitung (§§. 29—21) ausführlich gelehrt. Es bleibt uns hier nur noch der Grund nachzuweisen übrig, warum man die Dezimalzahlen wie einen einzigen Dezimalbruch lesen könne, indem man nur den Nenner der letzten Dezi-

malziffer der Zahl, die wie eine ganze Zahl gelesen wird, mit ausspricht. So wird die vorige Zahl 5,34 gesprochen: 534 Hundertel. Wirklich sind 5 Ganze gleich $\frac{500}{100}$, 3 Zehntel sind $= \frac{30}{100}$, und die letzte Ziffer 4 drückt ebenfalls $\frac{4}{100}$ aus. Die Zahl 5,34 ist also eben das, was die Summe $\frac{500}{100} + \frac{30}{100} + \frac{4}{100}$, oder $\frac{500 + 30 + 4}{100}$, oder $\frac{534}{100}$ ist. Auf ähnliche Weise erhellt dasselbe bey jeder andern zehntheiligen Zahl.

§. 103. **Willkührlicher Satz.** Wie wir uns in den §§. 11. 14. der **Einl.**, zur leichtern und schnelleren Bestimmung des allgemeinen Werthes der Einheit und der eine ganze Zahl bezeichnenden Ziffern überhaupt, des Ausdruckes **Ordnung** bedienten, und die der Einheit die erste, zweyte, dritte . . . Ordnung nannten, je nachdem man sie mittels der Nullen weiter gegen die Linke hinrückte; eben so nennen wir hier, z. B. bey der Zahl 3,284, die auf die Ziffern des Ganzen folgende erste Ziffer 2 die **Dezimalziffer der ersten Ordnung**; durch diese wird, da keine Nenner untergeschrieben werden, ein ganzer Dezimalbruch bezeichnet, dessen Nenner die Einheit der ersten Ordnung, oder 10, ist; — die Ziffer 8 an der zweyten Stelle nach dem Komma heißt die **Dezimalziffer der zweyten Ordnung**; diese bezeichnet einen Dezimalbruch, dessen Nenner die Einheit der zweyten Ordnung, oder 100 ist; — die Ziffer 4 an der dritten Stelle nach dem Komma heißt die **Dezimalziffer der dritten Ordnung**; durch sie wird ein Dezimalbruch bezeichnet, dessen Nenner die Einheit von der dritten Ordnung, oder 1000, ist u. s. w.

§. 104. **Aufgabe 1. Gegebene zehntheilige Zahlen zu addiren.**

Auflösung. Man setze die gegebenen Zahlen so untereinander, daß ihre Ziffern so, wie sie sich ihrem Werthe oder ihrer Ordnung nach entsprechen, in Reihen kommen, und addire dann, wie bey ganzen Zahlen.

Beyspiel. 3,034 + 0,2528 + 23,005. Man setze, wie folgt:

$$\begin{array}{r} 3{,}034 \\ 0{,}2528 \\ 23{,}005 \\ \hline 26{,}2918 \end{array}$$

Beweis. Dieser ist für diese, wie für die folgende Aufgabe, nicht wesentlich von dem Beweise über das Verfahren bey der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen verschieden (§§. 2. 8. 9.).

§. 105. Aufgabe 2. Eine gegebene zehntheilige Zahl von einer größeren zu subtrahiren.

Auflösung. Man setze die Ziffern des Subtrahends unter die entsprechenden des Minuends, füge dem Minuend zur Rechten so viele Nullen bey, als der Subtrahend mehrere Ziffern enthält, und verfahre dann, wie bey ganzen Zahlen.

Beyspiel. Minuend 4,1323 | 3,5700
Subtr. 2,401 | 2,3809

$$\begin{array}{r} 4{,}1323 \\ 2{,}401 \\ \hline 1{,}7313 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{r} 3{,}5700 \\ 2{,}3809 \\ \hline 1{,}1891 \end{array} \right.$$

Im 2ten Beyspiele soll nämlich von 3,57 die Zahl 2,3809 abgezogen werden, daher kann man nun entweder der Zahl 3,57 zwey Nullen wirklich beyfügen, wodurch ihr Werth nicht geändert, aber doch eine gleiche Anzahl von Dezimalstellen mit der im Subtrahende erhalten wird, oder man denkt sich blos jene fehlenden Stellen durch Nullen ergänzt, und spricht 9 von 10 u. s. w.

§. 106. Zusatz. Es wird eine ganze Zahl von einer größeren zehntheiligen Zahl abgezogen, wenn man zur Differenz der ganzen Zahlen die Dezimalziffern als solche hinzusetzt; z. B. 3,24 — 2 = 1,24.

Um aber von einer größeren ganzen Zahl eine zehntheilige abzuziehen, werden der ersten Nullen entweder wirklich

beygefügt, oder nur beygefügt gedacht, und die letzte geltende Dezimalziffer zur Rechten wird dann von 10, die übrigen werden alle von 9 abgezogen. Hiebey wird blos noch bemerkt, daß die Ganzen um Eins vermindert worden sind — ganz nach §. 11. Z. B. man soll von 12 die Dezimalzahl 7,0324 abziehen. Man kann nun entweder statt 12 setzen 12,0000, was offenbar dasselbe ist, oder sogleich sprechen 4 von 10 bleibt 6; 2 von 9 bleibt 7 ꝛc., und 7 von 11 (statt von 12) bleibt 4, so hat man die Differenz 4,9676.

§. 107. **Aufgabe 3.** **Eine gegebene zehntheilige Zahl mit der Einheit einer gewissen Ordnung zu multipliziren.**

Auflösung. Man rücke das Komma um so viel Stellen von der Linken zur Rechten zurücke, von der wievielsten Ordnung die Einheit ist, mit welcher man multipliziren soll.

Beispiele. $42,36 \times 10 = 423,6$; $3,243 \times 100 = 324,3$; und $0,32 \times 1000 = 320$.

Beweis. Durch diese Multiplikation wird nicht der besondere Werth in den einzelnen Ziffern der Zahl, sondern nur der allgemeine Werth der zehntheiligen Zahl nach dem Gesetze der Einheit von einer gewissen Ordnung gesteigert. Allein diese Steigerung des Generalwerthes bewirken wir offenbar durch die angegebene Versetzung des Komma zur Rechten hin, so wie wir in den §§. 19. 20. in demselben Falle den Generalwerth einer ganzen Zahl blos durch ihre weitere Versetzung zur Linken hin erhöhten. So soll im ersten Beyspiele der Generalwerth einer jeden Ziffer der Zahl 42,36 um das 10fache erhöht, also aus den Zehnern sollen Hunderte, aus Einern Zehner, aus Zehntel Einer u. s. w. werden, was wirklich geschieht, wenn man setzt: 423,6; — so in allen Fällen.

§. 108. **Zusatz.** Da nun auch nur der Generalwerth einer zehntheiligen Zahl dadurch vermindert wird, daß man sie durch die Einheit von einer gewissen Ordnung dividirt (§. 28.): so wird auch diese Verminderung durch das Vor-

wärtsrücken des Komma gegen die Linke um so viele Stellen, als die Zahl, welche die Ordnung der Einheit ausdrückt, Nullen hat, erhalten. Z. B. 31,083 : 10 = 3,2083; und 43,29 : 1000 = 0,04329.

§. 109. Aufgabe 4. Gegebene zehntheilige Zahlen miteinander zu multipliziren.

Auflösung. Man verfahre, wie bey der Multiplikation ganzer Zahlen, und setze dann das Komma in dem Produkte von der Rechten zur Linken um so viele Stellen zurücke, wieviele Dezimalziffern oder Dezimalstellen in den beyden Faktoren sind.

Beyspiel. 3,02 × 0,8; und 0,342 × 0,037. Man setze, wie folgt:

$$1)\ \begin{array}{r} 302 \\ 8 \\ \hline 2416 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} 342 \\ 37 \\ \hline 2394 \\ 1026 \\ \hline 12654 \end{array}$$

Das wahre Produkt also aus 1) ist 2,416 und aus 2) 0,012654.

Beweis. Betrachtet man beyde Faktoren wie ganze Zahlen, so ist dieß eben so viel, als man rückte in beyden das Komma um die Summe ihrer Dezimalstellen gegen die Rechte zurücke; d. i. man multiplizirte beyde Faktoren zusammen durch die Einheit, deren Ordnung gleich ist jener Summe, oder der Anzahl der Dezimalstellen in beyden Faktoren (§. 107.).

Indem man also die zehntheilige Faktoren wie ganze betrachtet, nimmt man das Produkt seinem Generalwerth nach um die Einheit derjenigen Ordnung, welche gleich ist der Anzahl der Dezimalstellen in beyden Faktoren, zu hoch: man muß folglich, um das wahre Produkt zu bekommen, durch eben diese Einheit das gefundene Produkt, als eine ganze Zahl, dividiren, d. i. man muß nach §. 108. das

Komma um so viel Stellen gegen die Linke hinsetzen, als in beyden Faktoren Dezimalstellen sind.

Erläuterung. 3,02 wird eine ganze Zahl, wenn man setzt 3,02 × 100 (§. 109.) und 0,8 × 10 wird auch = 8 Ganzen. Das Faktum 2416, als ganze Zahl, wird seinem Generalwerthe nach wegen dieser Erhöhung der Faktoren um 100 × 10, oder um 1000, d. i. um die Einheit der (2 + 1)ten oder der 3ten Ordnung zu hoch genommen.

Eben so ist 0,342 × 1000 = 342; und 0,037 × 1000 = 37 (§. 109.). Der Generalwerth beyder Faktoren wird also hier durch die Einheit derjenigen Ordnung gesteigert, welche die Summe der Ordnungen der Einheit ist, wodurch jeder Faktor multiplizirt wurde, nämlich um 1000000. Also wird auch hier wieder das Faktum 12654, als ganze Zahl, seinem Generalwerthe nach um die Einheit von der (3 + 3)ten, d. i. der 6ten Ordnung (= der Anzahl der Dezimalstellen in beyden Faktoren) erhöht.

§. 110. Zusatz. Ist der eine Faktor eine ganze Zahl, der andere eine zehntheilige: so multiplizirt man sie wie ganze Zahlen, und setzt dann das Komma von der Rechten zur Linken um so viel Stellen hin, als der eine Faktor Dezimalziffern hat; z. B. 24 × 0,03 = 0,72.

Anmerkung. Wenn man 2 große Dezimalzahlen miteinander multipliziren soll; z. B. 45,625957 mit 28,635, und man wollte das Produkt nur so genau, daß die Ziffer z. B. der Tausendtel noch dabey wäre; so könnte man nach der folgenden praktischen Regel verfahren: man kehre die Ordnung der Ziffern in der einen Zahl z. B. in der letzten um, und schreibe diese (hier 53682) so unter die andere Zahl, daß die Ziffer, welche in jener unveränderten Zahl, die Einer ausdrückt, hier die Ziffer 8, unter diejenige Dezimalziffer der oberen Zahl zu stehen kömmt, welche um 2 Ordnungen niedriger ist, als die Ordnung der Dezimalziffer, welche man noch im Produkte haben will. In unserem Beyspiele muß man also die Zahl 53682 so unter

45,625957 bringen, daß die Ziffer 8 in der ersten Zahl unter die 100tausendtel der anderen Zahl zu stehen kömmt.

Diese so gesetzten Faktoren multiplizirt man dann miteinander so, daß man im Multiplikand nur diejenige Ziffer zuerst multiplizirt, welche über die Ziffer des Multiplikators steht, womit man multipliziren muß. In unserem Beyspiele multiplizirt man mit 2 durch; dann mit 8 den Multiplikand, von 5 angefangen; dann mit 6 den Multiplikand, von 9 angefangen u. s. w.

Unser Beyspiel steht demnach so:

```
45,625957
    53682
---------
 91251914
 36500760
  2737554
   136875
    22810
---------
130649913,
```

also das gewünschte Produkt = 1306,499; das ganze wahre Produkt wäre gewesen 1306,499278695. In Betreff des richtigen Setzens des Striches, oder Komma, im gefundenen Produkte, ist zu bemerken, daß man dem Produkte zur Rechten soviele Nullen anhängen müsse, wieviele einzelne Produkte man dem ersten einzelnen Produkte untergesetzt hat. Dann erst rückt man das Komma von der Rechten zur Linken im Produkte um soviele Stellen hin, als wieviele Dezimalstellen man in beyden gegebenen Faktoren hat. In unserem Beyspiele muß man setzen 130649930000, und dann 6 + 3, d. i. 9 Dezimalstellen bezeichnen.

Beysp. 2. Man will im Produkte aus den Zahlen 54,236 und 532,27 nur noch die Stelle der 100tel beybehalten. Man setzt, wie vorhin, $\begin{matrix}54,2360..\\ 72235\end{matrix}$, und indem man die obere Zahl noch mit 2 Nullen ergänzt, multiplizirt man sie mit der untern, wie im vorigen Beyspiele. Man

erhält das Produkt 28868953, welchem man wieder 4 Nullen am Ende beygefügt denkt. Rückt man nun das Komma um 6 + 2, d. i. um 8 Stellen von der Rechten zur Linken hin: so erhält man das gewünschte Faktum 28868,19.

Beysp. 3. Es sey 0,227538917 mit 0,5664178 zu multipliziren, und man will das Faktum nur mit 7 Dezimalstellen, oder noch in den 10 Millionteln genau; so setzt man: $\begin{matrix}0{,}227538917\\ 87146650\end{matrix}$, multiplizirt sogleich mit 5, den Multiplikand von 1 angefangen, und dem erhaltenen Produkte 128882059 hängt man 7 Nullen an, und schneidet dann 9 + 7, d. i. 16 Dezimalstellen ab: so hat man das gewünschte Produkt 0,1288820 mit den 7 ganz genauen Dezimalziffern.

§. 111. **Aufgabe 5. Eine größere zehntheilige Zahl durch eine kleinere zu dividiren.**

Auflösung. Es können hier nur 5 Fälle vorkommen: denn entweder enthält sowohl der Dividend, als der Divisor Dezimalziffern, oder diese kommen nicht in beyden zugleich vor.

Im ersten Falle ist die Anzahl der Dezimalziffern in beyden gegebenen Zahlen (1) entweder gleich oder ungleich; nämlich der Dividend enthält dann (2) entweder mehrere, oder (3) wenigere Dezimalziffern, als der Divisor.

Im zweyten Falle enthält (4) entweder der Divisor alle Dezimalziffern, oder (5) der Dividend alle.

Die folgenden für diese 5 Fälle gegebenen Regeln erschöpfen also die Auflösung.

Regel für den Fall. 1). Man dividire, wie bey ganzen Zahlen. Der erhaltene Quotient ist dann die gesuchte Zahl.

Beyspiel.

$$\begin{matrix}(1{,}2 & : & 0{,}2)\\ (12 & : & 2)\end{matrix} = 6; \text{ und } \begin{matrix}(4{,}28 & : & 0{,}04)\\ (428 & : & 4)\end{matrix} = 107.$$

Regel für den Fall 2). Man rücke sowohl im Dividende, als im Divisor das Komma um soviele Stellen gegen die Rechte hin, wieviele Dezimalziffern im Divisor enthalten sind.

Beyspiel.

(0,24 : 0,2) = 1, aber und (1,289 : 0,04) = 32, aber
(2,4 : 2) Rest 0,4; (128,9 : 4) Rest 0,9.

Wie man mit diesem Reste verfährt, kömmt im nächsten §. vor.

Regel für Fall 3). Man füge dem Dividende so viele Nullen zur Rechten bey, als der Ueberschuß der Anzahl der Dezimalziffern des Divisors über die des Dividends beträgt. Dadurch erhält man Fall 1) mit dessen Regel.

(1,2 : 0,02)
(120 : 2) = 60; und (1166,4 : 0,486)
(1166400 : 486) = 2400.

Regel für Fall 4). Man füge hier dem Dividende so viele Nullen bey, als Dezimalziffern im Divisor sind, und dividire wieder, wie bey ganzen Zahlen.

Beyspiel.

(12 : 0,02)
(1200 : 2) = 600; und (324 : 0,005)
(324000 : 5) = 64800.

Die allgemeine, für diese 4 Fälle geltende, Regel ist also: Man steigere den Generalwerth des Dividends um eben so viel, um wieviel der Generalwerth des Divisors muß gesteigert werden, wenn er eine ganze Zahl werden soll. Denn diese Steigerung wird durch das vorgeschriebene Verschieben des Komma und durch die Beyfügung der Nullen erhalten.

Beweis. Die gleiche Steigerung des Generalwerthes des Dividends und des Divisors läßt den Quotienten ungeändert (§. 31.); oder durch die Multiplikation mit derselben Einheit von einer gewissen Ordnung sowohl im Dividende, als im Divisor werden diese gleichvielfach zusammengesetzte Zahlen; die gleichen Vermehrungen aber sind hier gleich

entgegengesetzt, lassen folglich den Quotienten ungeändert. (§. 43.).

Regel für Fall 5). Man dividire wie mit ganzen Zahlen, aber im erhaltenen Quotienten setze man das Komma von der Rechten zur Linken um so viele Stellen hin, als Dezimalstellen im Dividend sind.

Beyspiel.

$$\left.\begin{array}{l}(6{,}012 : 2)\\(6012 : 2)\end{array}\right\} = 3006;$$ also der Quotient = 3,006.

Beweis. Betrachtet man den Dividend als ganze Zahl: so ist es eben so viel, als man rückte das Komma um alle seine Dezimalstellen zurücke, d. i. als multiplizirte man ihn mit der Einheit von der sovielsten Ordnung, als Dezimalstellen im Dividend sind (§. 109.); es wird folglich der Generalwerth des Quotienten um eben diese Einheit zu hoch genommen (§. 30.). Um daher den wahren Quotienten zu erhalten, muß man jene zum Quotienten erhaltene Zahl wieder durch die Einheit jener Ordnung dividiren, was kurz durch die in der Regel angegebene Setzung des Komma geschieht (§. 108.).

§. 112. Zusatz 1. Hat man die Division, wie in ganzen Zahlen, vollendet, und es bleibt ein Rest: so macht man diesen zum neuen Dividend, indem man, wenn er nicht selbst den Divisor enthält, Nullen hinzufügt, durch welche der Werth des Dividends nicht geändert wird. Eben das thut man bey jedem neuen erhaltenen Reste. Auf diese Art wird durch fortgesetzte Division der Quotient immer genauer gefunden. Aber in diesem muß man nach abgebrochener oder geendigter Fortsetzung der Division so viele Stellen als Dezimalstellen bezeichnen, wieviele Dezimalziffern noch im Dividende waren, und wieviele Nullen man beysetzte. Denn durch die Art, wie man die Division fortsetzt, wird dieser Fall auf Fall 5) reduzirt.

Man setzt z. B. die Division in dem bey der Regel für Fall 2) angeführten Beyspiele auf diese Art fort:

0,24 : 0,2 = 2,4 : 2 = 1,2. Und 1,289 : 0,04 = 128,9 : 4; eben so: 3,74 : 0,3 = 37,4 : 3.

Diese Beyspiele setze man, wie gewöhnlich an:

```
128,900 . . . |4      ;  und 37,4000 . . |3
              |32225                     |124666 . . .
12                        3
 9                        7
 8                        6
 10                       14
 18                       12
  20                       20
  20                       18
  0                        2
```

Der ganze Quotient ist demnach im ersten Beyspiele 32,225; im zweyten 12,4666 . . . . d. i. jede folgende Quotientenziffer ist 6, weil der Rest immer 2 bleibt. Eine solche Division kann man fortsetzen, so lange man will.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß es unnöthig ist, beym praktischen Rechnen dem gegebenen Dividende jene Nullen beyzufügen. Hier geschah es blos, um die Richtigkeit des vorgeschriebenen Verfahrens zu zeigen. Sondern nachdem alle Ganze aus dem Dividende herabgesetzt, und die richtigen Quotientenziffern aus ihnen gefunden sind, setze man hinter diesen sogleich ein Komma, und setze die Division fort, ohne die dem Reste beygefügten Nullen eigends im Dividende zu bemerken.

§. 113. Zusatz 2. Aus dem vorigen Zusatze erhellt deutlich, daß man auch die Division ganzer Zahlen, welche einen Rest läßt, nach Belieben fortsetzen, oder einen immer genauern Quotienten finden könne, wenn man in ihm nach den, eine ganze Zahl bezeichnenden, Ziffern ein Komma, zum jedesmaligen Reste aber ein Null setzt.

So setze man zum Reste 4 im 1ten Beyspiele §. 36. eine Null, so erhält man die Quotientenziffer 8. Der ganze

Quotient ist also 8709,8. Im Beyspiele §. 37. bleibt 9 als Rest; man setzt nun die Division so fort:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 24 \\ 72 & 375 \\ \hline 180 & \\ 168 & \\ \hline 120 & \\ 120 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Der ganze Quotient ist also 37429,375.

§. 114. Zusatz 3. Man dividirt eine kleinere zehntheilige Zahl durch eine größere, welche wenigere Dezimalziffern, als jene, enthält, dadurch, daß man nach der allgemeinen Regel des §. 111. zuerst verfährt, und dann die Division nach §. 112. fortsetzt; z. B. 0,0272 : 0,16 = 2,72 : 16 = 0,17.

§. 115. Zusatz 4. Man verwandelt daher jeden ächten gemeinen Bruch, welches auch sein Nenner sey, in eine zehntheilig gebrochene, wenn man durch jenen die Division fortsetzt, indem man dem Zähler immer Nullen beygesetzt denkt. Z. B. $\frac{4}{5} = \frac{40}{5} \ldots = 0{,}8$, und $\frac{3}{7} = \frac{3{,}000 \ldots}{7}$ = 0,4285714 . . .

§. 116. Zusatz 5. Soll man daher einen Dezimalbruch mit einem gemeinen Bruche multipliziren, oder durch diesen dividiren u. s. w.: so verwandle man diesen in eine Dezimalzahl, und verfahre nach der vorgeschriebenen Regel des bestimmten Falles; z. B. $0{,}6 \times \frac{3}{4} = 06 \times 0{,}75 = 0{,}45$.

§ 117. Zusatz 6. Man dividirt eine kleinere Dezimalzahl durch eine ganze, indem man nach der Regel für Fall 5) im §. 111. verfährt. Z. B. 0,0036 : 6. Man setze 36 : 6 = 6; also ist der wahre Quotient = 0,0006.

Umgekehrt dividirt man eine kleinere ganze Zahl durch eine zehntheilige, wenn man nach §. 112. die Division fortsetzt. Z. B. 3 : 4,6 = 30 : 46 = 0,652 . . .

Anmerkung. In dem Falle, daß man aus dem durch fortgesetzte Division erhaltenen Quotienten, oder überhaupt aus einer zehntheiligen Zahl, eine oder mehrere der niedrigsten Dezimalziffern weglassen will, weil sie sehr kleine Theile des Ganzen sind, vermehrt man gewöhnlich die folgende noch beybehaltene Dezimalziffer um eine Einheit ihrer Ordnung. Da man nun bey jenem Vernachläßigen sowohl, als dieser Vermehrung, einen Fehler begeht: so entscheidet folgende allgemeine Regel, welcher Fehler der geringere sey, oder ob man blos vernachläßigen dürfe, ohne zu vermehren. Nämlich: Machen diejenigen Ziffern, die man zu den zu vernachläßigenden addiren muß, um diese zu Nullen zu machen, eine kleinere Summe aus, als die zu vernachläßigenden: so darf man die folgende noch beybehaltene Ziffer um 1 vermehren. Z. B. es sey im 2ten Beyspiele des §. 115. die genannte Einheit oder das Maß = 1 Fuß: so ist es offenbar, daß nicht nur die letzte Ziffer 4 = 10 Milliontel, als auch die folgenden 71 sehr kleine Theile eines Fußes sind, die man, ohne merklichen Fehler, vernachläßigen darf. Man sehe nun, ob die beyzubehaltende Ziffer 5 um 1 vermehrt werden dürfe: es ist nämlich $\left(\begin{array}{r} 5714 \\ +\ 286 \end{array}\right) = 600$ oder 6. Da nun 286 eine kleinere Summe geben, als 714; so ist hier der Fehler bey der Mehrung kleiner, als bey der bloßen Vernachläßigung. Aber wollte man aus 3,464 die 1000tel weglassen: so würde man richtiger 3,46 als 3,47 nehmen; indem die Vermehrung 6 größer, als 4 ist. — Ist 5 die niedrigste zu vernachläßigende Ziffer: so trifft, wie man einsieht, derselbe Fehler bey dem Vermehren um 1, wie bey dem bloßen Weglassen, ein. Es gilt daher hier die Regel: ist die zu vernachläßigende Ziffer größer, als 5: so hat die Vermehrung um 1 statt; umgekehrt, wenn sie kleiner, als 5.

§. 118. **Aufgabe 6. Eine gegebene zehntheilige Zahl zur zweyten oder dritten Dignität zu erheben.**

Auflösung. Man multiplizire die zehntheilige Zahl im ersten Falle einmal, im zweyten zweymal mit sich selbst, oder, was dasselbe ist, man setze sie zwey- oder dreymal durch Multiplikation (§. 109.).

Beyspiel. $3{,}04^2 = 3{,}04 \times 3{,}04 = 9{,}2416$.

Beweis. Eine jede zehntheilige Zahl ist gleich entweder einem ächten, oder einem unächten gemeinen Bruche; folglich muß sie eben so, wie dieser, nach §. 47. zum Quadrat oder Würfel erhoben werden (§. 100.).

§. 119. Aufgabe 7. Aus einer gegebenen zehntheiligen Zahl die zweyte oder dritte Wurzel auszuziehen.

Auflösung. Man theile zuerst die das Ganze bezeichnenden Ziffern in Klassen, im ersten Falle nach §. 57., im zweyten nach §. 67. Dann theile man von der Linken zur Rechten auch die Dezimalziffern in Klassen, indem man, wenn die zweyte Wurzel verlangt wird, 2 Ziffern, aber 3 Ziffern zur Klasse nimmt, wenn die dritte Wurzel verlangt wird. Sind nicht soviele Dezimalziffern gegeben, daß die letzte Klasse zur Rechten ihre gehörige Anzahl Ziffern erhielte: so füllt man die fehlenden Stellen durch Nullen aus. Das Ausziehen der Wurzel selbst geschieht übrigens wie bey ganzen Zahlen; in der erhaltenen Wurzel aber bezeichnet man mittels des Komma so viele Dezimalstellen, wieviele Klassen die Dezimalziffern der Dignität gaben.

Beyspiel. 1) $\sqrt{413{,}45609}$; 2) $\sqrt[3]{4{,}2783768}$; in Klassen getheilt, hat man in 1) 4|13|45|60|90; in 2) sind die Klassen 4|278|376|800; aus jenem Beyspiele erhält man die zweyte Wurzel 20,333 und bleibt Rest 25201; und aus diesem ist die dritte Wurzel = 1,623, und bleibt Rest 3185433; und 3) $\sqrt[3]{0{,}240678} = 0{,}62$ bleibt Rest 2350.

Beweis. Aus der gleichförmigen Entstehungsart der Dignitäten einer zehntheiligen und ganzen Zahl ist klar, daß

jede folgende Dezimalziffer, wie jede folgende die Ganze bezeichnende Ziffer, im Quadrate 2, und im Würfel 3 Stellen, und zwar jene 2 oder 3 Dezimalstellen geben müsse; daß folglich die vorgeschriebene Klasseneintheilung richtig sey. — Der Grund der vorgeschriebenen Bestimmung der Dezimalziffern in der aufgefundenen Wurzel leuchtet von selbst ein.

§. 120. Zusatz 1. Da man sich einer gegebenen Dignität soviele Klassen von Nullen zur Rechten beygefügt denken kann, als man will: so sieht man von selbst ein, wie man in den vorigen Beyspielen, wo Reste bleiben, die Ausziehung der 2ten oder 3ten Wurzel fortsetzen könne. Je weiter man diese fortsetzt, desto mehr nähert man sich der wahren Wurzel. So ist 0,240678 = 0,240678000010 u. s. w.

§. 121. Zusatz 2. Denkt man sich eben so einer unvollkommnen Potenz, als einer ganzen Zahl, solche Klassen von Nullen beygefügt, welche dann gerade so, wie vorhin, Dezimalstellen bezeichnen, und setzt dann zum ersten erhaltenen Reste die erste Nullenklasse, zum zweyten die zweyte u. s. f.; so kann man sich dem wahren Werthe der gesuchten Wurzel, so weit man will, nähern, indem man zu den die Ganze bezeichnenden Wurzelziffern immer mehrere Dezimalziffern findet.

Beyspiel. Im §. 54. ist das unvollkommene Quadrat 63 angegeben; dieses ist aber gleich 63,00|00|00|00| . . . folglich ist die nähere zweyte Wurzel = 7,9372 . . . Es muß nämlich jede Aufgabe, die Wurzel durch Näherung zu finden, nach §. 57. oder nach §. 67. aufgelößt werden. In dem Beysp. II. am Ende des §. 57. blieb der Rest = 1. Man setze diesem, wie jedem folgenden Reste, 2 Nullen, oder eine Klasse Nullen bey: so bekömmt man die nähere Quadratwurzel = 5006,000099 . . . Und im Beysp. II. am Ende des §. 67. bleibt derselbe Rest 1. Setzt man diesem, wie jedem folgenden Reste, 3 Nullen, oder eine Nullenklasse bey: so findet man, daß die Cubikwurzel schon so nahe gefunden ist, daß die nächste Ziffer schon unter die Milliontel gehört.

Anmerkung 1. Der Hauptnutzen mit zehntheiligen Zahlen zu rechnen, besteht demnach darin, daß man 1) einen immer genauern Quotienten, 2) eine immer nähere Wurzel finden kann.

Anmerkung 2. Wollte man den bestimmten Werth einer zehntheiligen Zahl in einer benannten Zahl niederer Art finden: so multiplizirte man nur die zehntheilige Zahl mit derjenigen Zahl, welcher das Maß, von dem in ihr die Rede ist, gleich ist. Z. B. 0,75 Gulden = 0,75 × 60 (Kreutzer) = 45 Kreutzern. Oder 0,8 Gulden = 0,8 × 60 = 48 Kreutzern.

Es erhellt dieses aus der ersten Schlußanmerkung zu den gemeinen Brüchen.

Anmerkung 3. Die älteren Mathematiker, wie Lucas de Burgos und Juan de Ortega, welche im 16ten Jahrhunderte schrieben, kannten keine andere Näherungen der Wurzel, als die durch Anhängung eines vulgären Bruches an die Wurzel, als ganze Zahl. Selbst spätere Mathematiker, welche schon die Näherung durch zehntheilige Brüche kannten, lehrten wegen der Bequemlichkeit im Rechnen jene Methode der Annäherung. Nebst der Darstellung einer eigenen Methode, die Wurzel auszuziehen, that ich dasselbe in meinem Buche „kurzer und faßlicher Unterricht in der Rechenkunst, Geometrie, Mechanik und Statik und bürgerlicher Baukunst für Bürger- u. Sonntagsschulen Würzb. 1812.

Nämlich im Beysp. I. des §. 57. würde man nach dieser Methode die Wurzel so angeben müssen: $9845 + \frac{15275}{19691}$ nach dieser Regel: man setze zur Quadratwurzel, als einer ganzen Zahl, einen Bruch, dessen Zähler der erhaltene Rest, und dessen Nenner die gefundene doppelte, und um 1 vermehrte, Wurzel ist.

Der Grund dieses Verfahrens liegt darin: es sey die gesuchte Wurzel $9845 + x$; so ist $(9845 + x)^2$ = unserer gegebenen Quadratzahl, die wir mit a^2 bezeichnen wollen. Oder es ist nach §. 55. Auflös. 2. $9845^2 + 19690x + x^2 = a^2$. Demnach ist $19690x + x^2 = a^2 - 9845^2$

oder = unserem Reste 15975. Zieht man nun x^2 auf beyden Seiten ab: so hat man $19690x = 15975 - x^2$, daher, alles durch den Faktor von x dividirt, hat man $x = \frac{15975 - x^2}{19690}$. Durch diesen Ausdruck von x erkennt man, daß dieses x, oder der wahre noch zur Wurzel 9845 zu setzende Bruch etwas kleiner sey, als $\frac{15975}{19690}$, so, daß, wenn man diesen Bruch statt x setzen würde, die gesuchte Wurzel etwas zu hoch angegeben wäre.

Nun ist aber auch aus dem vorigen Ansatze $19690x + x^2 = 15975$, oder $x(19690 + x) = 15975$; demnach der wahre Werth von $x = \frac{15975}{19690 + x}$, d. i. x ist etwas größer, als $\frac{15975}{19690 + 1}$.

Wenn man demnach zur Wurzel 9845, als ganzen Zahl, den Bruch $\frac{15975}{19691}$ setzt: so nimmt man diese wahre Wurzel etwas zu niedrig.

In der That, wenn man die Wurzel durch Näherung mittels der Dezimalbrüche nach §. 121. sucht: so findet man diese Wurzel = 9845,811292 . . . Aber $\frac{15975}{19690} =$ 0,8113 . . . und $\frac{15975}{19691} = 0,81128$, woraus wirklich erhellt, daß zwar der letztere Bruch sich dem wahren Werthe der Wurzel mehr nähere, als der vorige; allein daß er in der 5ten Dezimalstelle zu klein sey. Man sieht indessen, daß das Verfahren der Alten genüge, sobald nicht die größte Schärfe verlangt wird.

In Betreff der Näherungen von Cubikwurzeln gaben die Alten eine der vorigen ganz konforme Regel: man setze zur gefundenen Wurzel, als einer ganzen Zahl, einen Bruch, dessen Zähler ist der erhaltene Rest, und dessen Nenner ist die Summe aus der 3fachen gefundenen Wurzel und dem 3fachen Quadrate derselben um 1 vermehrt. Dieser Regel gemäß wären im Beysp. II. §. 67. die gesuchte Wurzel durch Näherung $\frac{1}{3.1002 + 3.1002^2 + 1} = \frac{1}{3012019}$, wo die Wurzel wieder um etwas zu klein genommen wird. Der Grund dieser Regel erhellt auf ähnliche Art, wie für die vorige Regel.

Der
Lehre von den Brüchen
Dritter Abschnitt.

Von den sechzigtheiligen Brüchen.

§. 122. Erklärung. Man kann die Sexagesimal- oder sechzigtheilig gebrochene Zahlen (§. 87.) auch solche Brüche nennen, deren Nenner lauter ganze Potenzen von 60, d. i. 60^1, 60^2, ($=3600$), 60^3 ($=216000$) rc. sind. Die Einheit, oder das Ganze, welches in diesen Brüchen nach dem Gesetze von 60 getheilt erscheint, ist der Grad. Man pflegt nämlich die Kreislinie in 360 gleiche Theile, deren jeder ein Grad heißt, zu theilen; der Grad wird wieder in 60 gleiche Theile, oder Minuten, die Minute eben so in 60 Sekunden, die Sekunde in 60 Tertien u. s. w. getheilt. Es ist demnach die Minute $\frac{1}{60}$ Grad, aber die Sekunde ist $\frac{1}{60^2}$ Grad, d. i. der 3600ste Theil eines Grades u. s. w.

Um nun auch bey diesen Brüchen die großen Nenner 60, 60^2 . . . nicht anschreiben zu müssen, hat man die Zeichen oder Charakteristiken ^{o}, $'$, $''$, $'''$, IV, V . . . gewählt, derer man sich auf folgende Art bedient:

statt zu schreiben 4 Ganze . . . setzt man 4°
— — — — 4 Minuten oder $\frac{4}{60}$ — — — $4'$
— — — — 4 Sekunden od. $\frac{4}{60^2}$ — — $4''$
— — — — 4 Tertien oder $\frac{4}{60^3}$ — — $4'''$.

§. 123. Aufgabe 1. Eine ganze Zahl in eine andere gleiche Zahl mit irgend einer Charakteristik, oder mit anderen Worten: eine gewisse Anzahl Grade in eine gleiche Anzahl von Minuten oder Sekunden rc. zu verwandeln.

Auflösung. Man multiplizire die gegebene Zahl sooft mit 60, oder mit der sovielsten Potenz von 60, als die gewünschte Charakteristik Striche hat; dem Produkte gebe man dann diese Charakteristik.

Beyspiel. 3 Ganze oder 3 Grade in eine gleiche Zahl mit der Charakteristik ($''$), oder in Sekunden zu verwandeln. Man setze $3.60.60 = 3.60^2 = 10800''$.

Beweis. Wir haben im §. 122. gesehen, daß die Anzahl Striche der Charakteristik im Grunde diejenige Potenz von 60 bezeichne, welche der Nenner des sechzigtheiligen Bruches ist.

Es ist daher $10800''$, oder $3.60^2)'' = \frac{3.60^2}{60^2}$. Aber diese letzte Zahl ist $= 3$, weil $\frac{60^2}{60^2} = 1$ ist. Demnach ist die Zahl 3, oder 3° gesetzmäßig in die gleiche Anzahl 10800 Sekunden verwandelt worden. Auf dieselbe Weise erhellt jedesmal derselbe Beweis bey jeder Art dieser Verwandlung.

Zusatz. Will man daher **umgekehrt** eine gewisse Anzahl von Sekunden u. d. gl. entweder auf Minuten zunächst, oder auf Grade bringen, was man das **Reduziren** nennt: so muß man umgekehrt die gegebene Zahl durch 60, oder durch die sovielste Potenz von 60 dividiren, umwieviel die Charakteristik der Zahl kleiner werden soll. Sollen z. B. jene 10800 Sekunden wieder auf ganze gebracht, d. i. in eine Zahl verwandelt werden, deren Charakteristik 0, oder um 2 Striche kleiner ist, als die der gegebenen Zahl, so muß man durch $60^2 = 3600$ dividiren, wodurch man wieder die gleiche Zahl $3 = 3°$ erhält.

Dieses Reduziren wendet man beym Addiren und Multipliziren der sechzigtheiligen Zahlen entweder sogleich, oder nach gänzlich vollzogener Operation an.

§. 124. **Aufgabe 2. Einen gemeinen Bruch in einen gleichen sechzigtheiligen mit einer gewünschten Charakteristik zu verwandeln.**

Auflösung. Man verfahre mit dem Zähler des Bruches, wie im §. 123. mit der ganzen Zahl, und dividire mit dem Nenner.

Beyspiel. Man soll $\frac{3}{5}$, d. i. 3 Fünftels-Grade in Sekunden, oder in den Sexagesimalbruch mit der Charakteristik (,,) verwandeln. Man setze $\frac{3 \cdot 60^2}{5} = \frac{10800}{5})''$ $= 2160''$.

Der Beweis erhellt, wie zuvor.

§. 125. Aufgabe 3. Einen gegebenen Sexagesimalbruch in einen andern gleichen mit einer gewünschten größeren Charakteristik zu verwandeln.

Auflösung. Man multiplizire die den gegebenen Bruch ausdrückende Zahl mit der sovielsten Potenz von 60, als der Unterschied beyder Charakteristiken ausdrückt; dem Produkte gebe man dann die gewünschte Charakteristik.

Beyspiel. Man soll 3 Sekunden in Tertien, oder $3''$ in einen gleichen Bruch mit der Charakteristik ($'''$) verwandeln. Weil hier nur 1 Strich Unterschied zwischen beyden Charakteristiken ist: so hat man $3 \cdot 60)''' = 180'''$, als gleichen Bruch. Hätte man Quarten, oder einen Bruch mit der Charakteristik (IV) haben wollen: so hätte man gesetzt $3 \cdot 60^2)^{IV}$.

Der Beweis ist derselbe, wie im §. 123. Denn die Charakteristik um einen oder zwey Striche größer angeben, ist dasselbe, als wenn man die Zahl durch 60, oder 60^2 dividirte. Nun hat man aber auch die Zahl mit 60, oder 60^2 multiplizirt, also wurde der Werth des gegebenen Bruches in sich nicht verändert.

§. 126. Erklärung. Eine Zahl, welche ganze und sechzigtheilige Brüche, oder mehrere dieser Brüche zugleich enthält, nennen wir eine Sexagesimalzahl, wie diese: 3 $4'$ $6''$ $24'''$.

Hiebey ist zu bemerken, daß man diese Brüche, sobald sie nur durch eine einziffrige Zahl gegeben sind, durch die diese Zahl bezeichnende Ziffer mit einer vorgesetzten Nulle zu schreiben pflege; die vorige Zahl wird nämlich so geschrieben: $3^\circ\ 04'\ 06''\ 24'''$.

§. 127. Aufgabe 4. Gegebene Sexagesimalzahlen zu addiren, oder zu subtrahiren.

Auflösung. Man setze die einzelnen Zahlen so untereinander, wie sie sich in ihren Charakteristiken entsprechen, und verfahre, wie bey Dezimalzahlen.

Beyspiel. Man soll zu $6^\circ\ 08'\ 04''\ 36'''$ addiren, oder davon subtrahiren $3^\circ\ 00'\ 02''\ 14'''$. Man setze

	6°	08′	04″	36‴		9°	54′	38″
	3	00	02	14		2	40	30
Summe	9°	08′	06″	50‴	Summe	12°	35′	8″
						nach §. 123. Zusatz.		
Differenz	3	08	02	22				

Zusatz 1. Muß man beym Subtrahiren entlehnen: so muß man sich erinnern, daß hier eine Einheit höherer Art gleich sey 60 Einheiten nächstniederer Art, eine Minute = 60 Sekunden u. s. w.

Z. B. man solle von $3^\circ\ 06'$ abziehen $1^\circ\ 35'$; so entlehnt man Eins von 3° und zieht nun $35'$ von $60' + 6'$, d. i. von $66'$ ab; die Differenz ist $1^\circ\ 31'$.

Zusatz 2. Eben so ist z. B. $3^\circ = 2^\circ\ 59'\ 59''\ 60'''$. Diese Zerlegung braucht man, wenn man von einer ganzen Zahl eine Sexagesimalzahl abziehen soll; z. B. von 8° die Zahl $5^\circ\ 04'\ 27''\ 08'''\ 44^{IV}$. Man setze:

	7°	59′	59″	59‴	60^{IV}
	5	04	27	08	44
Differenz	2°	55′	32″	51‴	16^{IV}.

Die Beweise erhellen von selbst.

§. 128. Aufgabe 5. Sexagesimalbrüche miteinander zu multipliziren.

Auflösung. Man multiplizire die gegebenen Zahlen, wie ganze, und gebe dem Produkte die Summe der Charakteristiken der gegebenen Brüche.

Beyspiele. $3' \cdot 4' = 12''$; $5' \cdot 3'' = 15'''$; $7''' \cdot 6'' = 42^{V}$ u. s. w.

Beweis. Die gegebenen Zahlen wie ganze betrachten und behandeln, ist dasselbe, als sie nach §. 122. wie die Zähler von den gleichen vulgären Brüchen betrachten und behandeln; die Summe der Charakteristiken addiren, ist dasselbe, als die Nenner jener gegebenen, als gemeine Brüche ausgedrückten, Zahlen miteinander multipliziren. Da nun diese Art, Brüche zu multipliziren, nach §§. 90. 91. als richtig erwiesen ist: so ist auch unsere Auflösung wahr. So ist im obigen 2ten Beysp. $5' = \frac{5}{60}$, und $3'' = \frac{3}{60^2}$, also $5' \cdot 3'' = \frac{5}{60} \times \frac{3}{60^2} = \frac{15}{60^3} = 15'''$ nach §. 122.

Zusatz. Es ist also auch $3 \cdot 4''$, oder $3^{\circ} \cdot 4''$ (§. 122.) $= 12''$.

§. 129. Aufgabe 6. Eine Sexagesimalzahl entweder mit einer ganzen, oder andern Sexagesimalzahl zu multipliziren.

Auflösung. Man verfahre, wie mit ganzen Zahlen, beobachte die Auflösung im §. 128, und bemerke, daß 60 Einheiten niederer Art = der Einheit der nächsthöheren Art sey.

Beyspiel. Nämlich $5^{\circ}\ 2'\ 3'' \times 5'\ 24''$. Man setze

$5^{\circ}\ 02'\ 03''$	Eben so:	$6^{\circ}\ 09'\ 12''\ 25'''$
$05'\ 24''$		9
$02'\ 00''\ 49'''\ 12^{IV}$		$54^{\circ}\ 81'\ 108''\ 225'''$ und
$25'\ 10''\ 15'''$	durch Redukt	$55^{\circ}\ 22'\ 51''\ 45'''$
$27'\ 11''\ 04'''\ 12^{IV}$.		(§. 123. Zusatz.)

§. 130. Aufgabe 7. Eine ganze Zahl (Anzahl Grade) durch einen sechzigtheiligen Bruch zu dividiren.

Auflösung. Man dividire, wie bey ganzen Zahlen; multiplizire aber den Quotienten mit der sovielsten Potenz von 60, als die Charakteristik des Bruches anzeigt.

Beyspiele. $\frac{6}{3'}$, oder $\frac{6^\circ}{3'} = 2 \cdot 60 = 120$. Eben so $\frac{4}{3''} = 1\frac{1}{3} \cdot 60^2 = 60^2 + \frac{60^2}{3} = 4800$.

Beweis. Den Divisor auch wie eine ganze Zahl betrachten, heißt ihn widerrechtlich um die sovielste Potenz von 60 erhöhen, als die Charakteristik des Divisors anzeigt. Dadurch wird aber um das ebensovielfache der Quotient widerrechtlich vermindert (§. 31.); man muß daher diesen mit eben jener Potenz multipliziren, um den wahren Quotienten zu erhalten.

Zusatz. Aus diesem Beweise erhellt, daß, wenn man die Aufgabe umkehrt, und den Divisor das Ganze seyn läßt, aber der Dividend ein Sexagesimalbruch ist, in diesem Falle der, wie bey ganzen Zahlen gefundene, Quotient dieselbe Charakteristik erhalten müsse, welche der Dividend hat. So ist $\frac{6'}{3} = 2 = 2'$; $\frac{12''}{3} = 4 = 4''$.

§. 131. Aufgabe 8. Einen gegebenen Sexagesimalbruch durch einen andern gegebenen zu dividiren.

Auflösung. Hier finden auf ähnliche Art, wie in der Dezimalrechnung, 3 Fälle statt:

1. Wenn beyde Brüche dieselbe Charakteristik haben: so dividire man, wie bey ganzen, und der Quotient ist eine ganze Zahl.

Beyspiel. $\frac{12'}{4'} = 3 = 3^\circ$; $\frac{12''}{4''} = 3 = 3$.

Beweis. Wenn man sich die gleichen Charakteristiken dieser Zahlen wegdenkt: so ist dieses eben soviel, als man verwandelt sie in die Gleichvielfachen; nun geben diese denselben Quotienten, wie ihre gleicheinfachen (§. 43.), also ist der aufgefundene Quotient der wahre ohne weitere Aenderung. So ist nach §. 121. $12' = \frac{12}{60}$, und $4' = \frac{4}{60}$, dieses 60 bey beyden Zahlen weggelassen, hat man sowohl den Dividend, als den Divisor, um das 60fache erhöht.

2. Wenn der Dividend eine größere Charakteristik (der Anzahl Striche nach) hat, als der Divisor: so dividire man zwar wieder, wie bey ganzen, aber dem so gefundenen Quotienten gebe man zur Charakteristik den Unterschied zwischen beyden Charakteristiken des Dividends und des Divisors.

Beyspiele. $\frac{12''}{3'} = 4 = 4'$; $\frac{12^{IV}}{3''} = 4 = 4''$.

Beweis. Wenn man beyde Charakteristiken gleichviel ändert, d. i., alle Striche im Divisor, und dagegen gleichviele im Dividende wegläßt: so hat man beyde blos um das Gleichvielfache erhöht, folglich, wie vorhin, eine gesetzmäßige Aenderung vorgenommen. Nach dieser Aenderung behält aber der Dividend noch eine Charakteristik, welche der Unterschied beyder Charakteristiken ist; folglich trifft dann der Fall im Zusatze zu §. 130. ein, oder der gefundene Quotient muß die gesagte Charakteristik erhalten. So ist es eins, ob man setzt: $\frac{12^{IV}}{3''}$, oder $\frac{12''}{3}$.

3. Wenn der Divisor eine größere Charakteristik (mehrere Striche) hat, als der Dividend: so dividire man wie bey ganzen Zahlen, aber den so erhaltenen Quotienten multiplizire man noch mit der sovielsten Potenz von 60, als die Differenz jener Charakteristiken anzeigt.

Beyspiele. $\frac{12'}{3''} = 4 \cdot 60 = 240$; $\frac{12''}{3^{V}} = 4 \cdot 60^3$
$= 4 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 60 = 4 \cdot 216000 = 864000 = 864000^{\circ}$.

Beweis. Wenn man in diesem Falle alle Striche im Dividende wegläßt, und gleich viele im Divisor: so hat man, wie im ersten Falle, eine den wahren Quotienten nicht verletzende Veränderung vorgenommen. Allein dann hat man den Divisionsfall des §. 130. So ist es in Beziehung auf den wahren Quotienten offenbar dasselbe, ob man schreibt $\frac{12}{3'}$ oder $\frac{12'}{3''}$; eben so ist $\frac{12''}{3^{V}} = \frac{12}{3'''}$.

§. 132. Aufgabe 9. Eine Sexagesimalzahl durch eine ganze Zahl zu dividiren.

Auflösung. Man dividire jede einzelne Zahl des Dividends nach §. 130. Zusatz, indem man von der Zahl der höchsten Art anfängt, den etwaigen Rest in eine gleiche Zahl der niederen gegebenen Art verwandelt, und die gegebene Zahl derselben Art aus dem Dividende dazu addirt.

Beyspiel.

Dividend	4 Divisor
$7^\circ\ 34'\ 06''\ 08'''$	$1\ \ 53'\ 31''\ 32'''$ Quotient.

$$
\begin{array}{l}
\underline{4} \\
\underline{3} \\
3 \cdot 60 = 180' \ (\text{§. } 123.) \\
\quad \underline{+\ 34} \\
\quad 214' \\
\quad \underline{212} \\
\quad \underline{\ \ 2'} \\
2 \cdot 60 = 120'' \ (\text{§. } 125.) \\
\quad \underline{+\ 06} \\
\quad 126'' \\
\quad \underline{124} \\
\quad \underline{\ \ 2''} \\
2 \cdot 60 = 120''' \\
\quad \underline{+\ 08} \\
\quad 128 \\
\quad \underline{128} \\
\quad 0
\end{array}
$$

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens erhellt von selbst.

§. 133. Aufgabe 10. Eine gegebene Sexagesimalzahl durch eine andere gegebene zu dividiren.

Auflösung. Unter Berücksichtigung der in den 3 vorigen §§. gegebenen Auflösungen verfahre man beynahe ganz so, wie bey ganzen mehrziffrigen Zahlen.

Beyspiel 1.

$36''\ 57'''\ 12^{IV} \,|\, 3'\ 04''$

$36''\ 48''$ (§ 128) $|\, 12'\ 03'.$

$0\ \ 09'''\ 12^{IV}$

$09'''\ 12^{IV}$

$0\ \ 0$

Beyspiel 2.

$02'\ \ 09''\ \ 36''' \,|\, 43'\ 12''.$

$2'.60 = 180''$ (§. 129.) $|\, 3'.$

$+\ 09''$

$129''\ 36'''$

$129''\ 36'''$

$0\ \ 0$

Beyspiel 3.

$22^{\circ}\ 28'\ 25''\ 23'''\ 12^{IV} \,|\, 02''\ 03'''.$

$22\ \ 18' \,|\, 6.60^2 + 5.60 + 05\ 04' = 21905\ 04'$ (§. 130).

$10'\ 25''$

$10'\ 15''$

$10''\ 23'''$

$10''\ 15'''$

$08'''\ 12^{IV}$

$08'''\ 12^{IV}$

$0.\ \ 0.$

Wenn man sich bey dieser Multiplikation erinnert, daß z. B. $03''' = \frac{3}{60^3} = \frac{3}{60.60^2}$ sey, so sieht man sogleich, daß $6.60^2 \times 03''' = \frac{18}{60} = 18'$ u. s. w. seyn müsse.

Anmerkung. Anfänger thun wohl, wenn sie den Quotienten mit dem Divisor multipliziren, um zu sehen, ob der Dividend wieder zum Vorschein komme.

Beyspiel 4.

$38'\ 11''\ 06''' \,|\, 8'\ 24''$

$33'\ 36'' \,|\, 4^{\circ}\ 32'\ 45''.$

$4'\ 35''$

oder $275''\ 06'''$

$268''\ 48'''$

$6''\ 18'''$

oder $378'''$

$6''\ 18'''$

$0.\ \ 0.$

Hier verfährt man ganz, wie bey den gewöhnlichen Divisionen ganzer Zahlen. Nämlich $\frac{275}{8}$ ist eigentlich $= 34$, und $\frac{378}{8} = 47$. Allein wegen der Multiplikation dieser 2 Quotienten mit der Zahl 24 im Divisor kömmt jedesmal ein zu großes Produkt heraus, daher sind 32 und 45 die wahren einzelnen Quotienten.

Beweis. Das Gesetzmäßige dieses Verfahrens erhellt von selbst.

Anmerkung 1. Die Proben über das Rechnen mit diesen Zahlen sind übrigens dieselben, ächt mathematischen, Proben, wie beym Rechnen mit ganzen Zahlen.

Anmerkung 2. Man könnte das Rechnen mit Sexagesimalzahlen auch dadurch vollenden, daß man alle einzelnen Zahlen auf eine gleiche von der niedrigsten gegebenen Art brächte, z. B. 5° 03′ 04″ in lauter Sekunden verwandelte. Allein dann müßte man die erhaltenen Produkte oder Quotienten, wieder auf die Zahlen von Sekunden, Minuten u. s. w. zurückführen, was eine unnöthige Weitläufigkeit wäre.

Indessen ist doch diese Art von Reduktion nothwendig, wenn z. B. der eine Faktor eine Dezimalzahl ist. Z. B. 3° 04′ 08″ soll mit 2,35 multiplizirt werden. Statt des ersten Faktors setze man den gleichen Faktor 11048″; diesen mit 2,35, wie gewöhnlich, multiplizirt, hat man das Produkt 25962,8″ = 432,713′ . . . = 7,2 188° . . . oder nach §. 117. Anm. = 7,2119° durch Resolvirung nach §. 123. Zusatz. Diese Zahl 7,2119° kann man nach §. 121. Anmerk. 2. in folgende verwandeln: 7° 06′ 39″ 57‴ 36ⁱᵛ.

Wenn der Divisor eine Dezimalzahl ist: so verfährt man 1) nach §. 132.; 2) nach §. 111. Regel für Fall 4. Z. B. 6° 09′ zu dividiren durch 2,03. Man setze

```
600°  900′ | 203
406        |-----------------
           | 2° 61′ = 3° 01′.
----
194° = 194 . 60′
     = 11640′ + 900′
     = 12540
       1218
       ----
        360
        203
        ---
  Rest  157
```

Dieser Rest kann entweder als $\frac{157'}{203}$ angesetzt werden, oder

man setzt die Division durch Beysetzung von Nullen, wie oben fort; wodurch man findet 3 01',77 rc. d. i. 3 01' 46" rc.

Anmerkung 3. In manchen der angeführten Operationen scheint etwas Widersinniges zu liegen; z. B. wenn man spricht: man solle 3 Grade mit 4 Minuten multiplizieren (3° · 4'); so scheint dieß offenbar sinnlos zu seyn. Allein dieser Schein verschwindet, sobald man bedenkt, daß 4 Min. nichts anders sind, als $\frac{4}{60}$ Grad, in welchem Falle denn dieses Multiplizieren, wie oben §. 94. gesagt wurde, ein Nehmen dieses Bruches von dem Ganzen ist. Eben so, wenn man setzt 4' × 3"; so ist dieß eben soviel, als $\frac{2}{60^2}$ von $\frac{4}{60}$ zu nehmen.

Auf ähnliche Art gilt dasselbe auch für die Divisionsfälle. Z. B. $\frac{8^\circ}{2'}$. Dieses sagt: man sehe, wie oft $\frac{2}{60}$ Grade in 8° enthalten seyen: — je kleiner nun hier ein solcher Divisor wird, desto größer der Quotient; was mit der für diesen Fall gegebenen Divisionsregel stimmt. Der Dividend, als ganze Zahl, ist immer benannt. Allein der Divisor, als ganze Zahl, ist auch hier seiner Natur nach unbenannt. Wenn man z. B. setzt $\frac{8^\circ}{4^\circ}$, um zu sehen, wie oft 4 Grade in 8 Graden enthalten seyen: so ist dieses offenbar eben soviel, als $\frac{8^\circ}{4}$, d. i. zu sehen, welches das 4tel von 8, oder von 8° sey. Eben so, wenn z. B. ein Feldmesser denselben Winkel 3mal gemessen und denselben das erstemal = 20° 59' 02", das zweytemal = 21 00' 45", das drittemal 20° 58' 50" gefunden hat, und er will nun, um den allenfallsigen Fehler auf die 3 Beobachtungen zu vertheilen, das Mittel, als näheres Resultat, aus jenen Zahlen finden: so addirt er diese, und die Summe = 61° 117',97" dividirt er dann durch 3, als ganze unbenannte Zahl; den erhaltenen Quotienten = 20° 59' 32" sieht er dann als den zu messenden Winkel an.

Anmerkung 4. Es ist von selbst klar, daß diese Sexagesimalrechnung überall ihre Anwendung finde, wo man ein Ganzes in 60 gleiche Theile, und jeden dieser Theile wieder in 60 kleinere u. s. w. zu theilen pflegt. Es ist dieses der Fall bey der Eintheilung der Zeit, indem eine Stunde = 60 Minuten, 1 Min. = 60 Sekunden, 1 Sek. = 60 Tertien u. s. w. ist. Das Ganze ist hier die Stunde, die man mit St. oder h zu bezeichnen pflegt; die Zeitminuten, Zeitsekunden ꝛc. werden, wie oben, die Minuten, Sekunden . . . im Bogen, mit Strichen, über die Zahlen gesetzt, bezeichnet.

Der gemeinen Arithmetik Vierter Theil.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen, mit ihrer Anwendung auf die goldne Regel.

§. 134.

Erklärung 1. Aus den §§. 29—31 der Einleit. ist klar, daß der Vergleich zweyer Zahlen überhaupt (auch die gebrochenen nicht ausgenommen), um zu sehen, wie die eine aus der andern entspringt, überhaupt ein Verhältniß dieser Zahlen heiße.

Es kann aber eine Zahl aus der andern entweder durch einfache, oder durch wiederholte Addition entspringen, d. i. so entspringen, daß man zur ersten Zahl noch eine Zahl addirt, oder daß man die erste Zahl wiederholt zu sich selbst addirt, um die andere zu erzeugen. Z. B. vergleicht man die Zahlen 2 und 8: so sieht man, daß, wenn man zur Zahl 2 noch 6 Einheiten addirt, die Zahl 8 entspringt. Diese Zahl kann aber auch aus 2 dadurch entspringen, daß man die Zahl 2 viermal durch Addition setzt, oder mit der Zahl 4 multiplizirt (§. 14.).

In dem ersten Falle nun, wo man darauf sieht, wie eine Zahl aus der andern durch einfache Addition aus der andern entsteht, heißt das Verhältniß das arithmetische; im zweyten Falle aber das geometrische. Diejenige Zahl aber, welche entweder zu der einen addirt, oder mit welcher diese multiplizirt werden muß, um die andere Zahl zu erzeugen, heißt der Exponent, oder Name des Verhältnisses, die beyden verglichenen Zahlen endlich nennt man die Glieder des Verhältnisses. Kehrt man die Ordnung der Glieder um: so wird das neue Verhältniß das umgekehrte, und das vorige das direkte oder gerade genannt; so ist das Verhältniß zwischen 8 und 2 das umgekehrte in Beziehung auf das gerade Verhältniß derselben Zahlen, wo 2 das erste und 8 das zweyte Glied ist.

Da es nun dem Vergleichen nicht zuwider ist, ob man darauf sehe, wie das erste Glied aus dem zweyten, oder dieses aus jenem entspringe, da man aber gewöhnlich den Ursprung des zweyten Gliedes aus dem ersten im Auge hat: so sieht man klar ein, daß, wenn die Zahlen 8 und 2 im arithmetischen Verhältnisse sind, 2 aus 8 durch Subtraktion der Zahl 6 von 8 erzeugt werde. Man mag also das gerade oder umgekehrte Verhältniß beyder Zahlen 8 und 2 nehmen: so bleibt immer die Zahl 6, bald addirt, bald subtrahirt, diejenige Zahl, mittels welcher immer das zweyte Glied aus dem ersten entsprungen gedacht werden muß; d. i. sie bleibt immer der Exponent des Verhältnisses. Weil man aber diesen durch Abziehen der kleinern Zahl von der größeren findet: so nennt man ihn auch den Unterschied, und bezeichnet selbst das arithmetische Verhältniß durch das Subtraktionszeichen; z. B. 2—8; 8—2, was man aber liest: 2 zu 8; 8 zu 2.

Betrachtet man eben so im umgekehrten geometrischen Verhältnisse 8 : 2 die Art, wie 2 aus 8 entspringt, so sieht man, daß 8 durch 4 dividirt die Zahl 2 giebt. Es ist also auch hier wieder die Zahl 4, mittels welcher immer das zweyte Glied aus dem ersten entspringt, folglich der wahre

Exponent des geraden und umgekehrten Verhältnisses, (indem man durch jenes dieses schon mitgegeben, folglich beyde gleich ursprünglich betrachten muß). Man bemerkt übrigens leicht, daß man auch diesen Exponenten des geometrischen Verhältnisses immer durch Division der größeren Zahl durch die kleinere findet; daher nennt man auch öfters den Exponenten den Quotienten des Verhältnisses, und wählt das Divisionszeichen (:) als das Zeichen dieses Verhältnisses, indem man setzt: 2 : 8; 8 : 2; d. i. 2 : zu 8; 8 zu 2.

Der Gleichförmigkeit willen ist man größtentheils darin übereingekommen, bey jedem geometrischen Verhältnisse das zweyte Glied aus dem ersten entsprungen zu betrachten, und auch nur dadurch den Exponenten aufzusuchen, daß man das zweyte Glied durch das erste dividirt; der Exponent mag demnach entweder eine ganze, oder gemischte Zahl oder ein eigentlicher Bruch werden.

§. 135. Erklärung 2. Man nennt 2 Verhältnisse gleich, wenn sie denselben Exponenten haben; z. B. 3 — 5 und 7 — 9 sind 2 gleiche arithmetische, und 2 : 4 und 3 : 6 zwey gleiche geometrische Verhältnisse; jene haben denselben Unterschied = 2; und diese denselben Quotienten 2.

Die Gleichheit zweyer Verhältnisse heißt eine Proportion, und zwar eine arithmetische, wenn die verglichenen Verhältnisse arithmetische, eine geometrische, wenn die Verhältnisse geometrische sind. Setzt man 3 — 5 = 7 — 9: so hat man eine arithmetische; aber eine geometrische Proportion durch 2 : 4 = 3 : 6. Diese 4 Zahlen in der Proportion heißen die Glieder derselben, und zwar, nach der Ordnung das 1ste, 2te, 3te, 4te Glied; das 1ste und 4te heißen auch die äußersten, das 2te und 3te die mittleren Glieder; endlich nennt man das 1te und 3te die vorhergehenden, und das 2te und 4te die nachfolgenden Glieder.

Proportionen, wie die vorstehenden, wo das 2te Glied vom 3ten verschieden ist, heißen abgesonderte (distrete);

sind aber diese beyden Glieder nicht verschieden: so heißen sie stetige oder zusammenhängende Proportionen. Z. B. 3—5 = 5—7; man schreibt dieß auch kurz so ÷ 3 — 5—7; und 2 : 4 = 4 : 8; was man kurz durch ∺ 2 : 4 : 8 schreibt.

§. 136. Zusatz 1. Die Proportion sagt also ihrer Natur nach aus, „Wie das zweyte Glied aus dem ersten entspringt: eben so entspringt das vierte aus dem dritten."

Diesen Satz durch 2 andere ausgedrückt: "Das vierte Glied ist um so viel größer, als das dritte, um wieviel größer das zweyte Glied ist, als das erste." Und „Das vierte Glied ist um so viel kleiner, als das dritte, um wieviel kleiner das zweyte ist, als das erste" erhält man durch ihn einen Prüfstein, ob die Glieder einer Proportion auch wahrhaft geometrisch proportional seyen, oder nicht, d. i. ob auch die in einem praktischen Falle gegebene Proportion eine wahre sey, oder nicht. Da in diesem Falle nur die Glieder eines Verhältnisses umgekehrt werden dürfen, um die wahre Proportion zu erhalten: so nennt man die Glieder einer Proportion, die sich nicht nach einem der vorigen Sätze entsprechen, umgekehrt proportional, zum Unterschiede von den gerade proportionalen Gliedern, die eine wahre Proportion bilden. So sind die Arbeiten den Zeiten gerade proportional, indem, wenn man alles Uebrige gleich setzt, ein Mensch in der doppelten Zeit noch einmal so viel, als in der einfachen ausrichtet; dieß heißt: die Glieder der Proportion, worin die Arbeiten und Zeiten untereinander verglichen, oder bestimmt werden, sind gerade proportional. Wollte man aber die Geschwindigkeiten zweyer Menschen, die einen und denselben Weg zurücke legen, bestimmen: so würde man dessen Geschwindigkeit die größere nennen, der in einer kürzeren Zeit den Weg zurücklegte; d. i. Geschwindigkeiten und Zeiten sind im umgekehrten Verhältnisse; oder die Glieder der Proportion, worin

sie miteinander zusammengestellt werden, sind umgekehrt proportional.

§. 137. Zusatz 2. Wir haben schon im §. 33. der Einl. aus der den Proportionen zum Grunde liegenden Schließart dargethan, daß sie zur Auffindung unbekannter Größen oder Zahlen dienen können. Die unbekannte Zahl selbst wird durch einen der letzten Buchstaben des lateinischen Alphabets (x, y, z) gewöhnlich bezeichnet.

Erster Abschnitt.

Von den arithmetischen Proportionen.

---

§. 138. Lehrsatz. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der zwey äußersten Glieder gleich der Summe der zwey mittleren.

Beyspiel. In der Proportion

$3 - 7 = 5 - 9$ ist

$3 + 9 = 7 + 5$; d. i. $12 = 12$.

Beweis. Aus der Erklärung der arithmetischen Proportion im §. 135. im Vergleiche mit §. 134. geht hervor, daß das letzte Glied das 3te Glied und den Exponenten oder Unterschied des zweyten Verhältnisses enthalten müsse. Thut man also noch das 1te hinzu: so ist diese Summe = dem dritten + dem ersten Gliede + dem Unterschiede. (So ist $3 + 9 = 3 + 5 + 4$).

Aber das zweyte Glied muß enthalten das erste, aus dem es entspringt, und den Unterschied des ersten Verhältnisses; thut man also noch das dritte Glied zu ihm hinzu: so ist diese Summe = dem ersten + dem dritten + dem Unterschiede (so ist $7 + 5 = 3 + 5 + 4$); also sind diese und die vorige Summe, da sie aus denselben Summanden

bestehen, und beyde Unterschiede gleich sind (§. 135.), gleich, also auch die im Lehrsatze ausgedrückten Summen.

§. 139. Zusatz. Es ist daher in der stetigen arithmetischen Proportion, wo man das zweyte Glied nur einmal ansetzt, also nur drey Glieder hat, die Summe der äußeren Glieder gleich dem doppelten mittleren Gliede, indem dieses Glied zugleich die Stelle des dritten Gliedes vertritt. So ist in $\div 1 - 3 - 5$ die Summe $1 + 5 = 2 \cdot 3 = 6$.

§. 140. Aufgabe 1. Aus drey gegebenen Gliedern einer abgesonderten arithmetischen Proportion das noch fehlende ($= x$) zu finden.

Auflösung. Hat man an die Stelle, wohin das unbekannte Glied fehlt, x gesetzt: so setze man nun 1) die Summe der äußeren Glieder gleich der Summe der mittleren; 2) ziehe man von jeder dieser Summen die mit der unbekannten Zahl x durch Addition verbundene Zahl ab: so hat man den Werth für x, und diesen an die Stelle von x in der Proportion gebracht, hat man das gesuchte Glied.

Beyspiel. Man soll zu den Zahlen 2, 7, 9 die vierte arithmetische Proportionalzahl suchen. Man setze also $2 - 7 = 9 - x$; dann $2 + x = 7 + 9$; endlich $x = 16 - 2 = 14$. Man hat also die Proportion $2 - 7 = 9 - 14$.

Beweis. Dieser ist für 1) durch den Lehrsatz (§. 138.), und für 2) durch Grundsatz 2. im §. 43. der Einl. ausgedrückt.

§. 141. Aufgabe 2. Zu zwey gegebenen Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Hat man, wie vorhin, an die Stelle des mittleren unbekannten Gliedes den Buchstaben x in der stetigen Proportion gesetzt: so setze man nun wieder 1) die Summe der äußern Glieder gleich 2x, und dividire 2) sowohl jene Summe, als 2x, durch 2: so erhält man den Werth für x in einer bestimmten Zahl ausgedrückt.

Beyspiel. Man soll zu den Zahlen 3 und 9 die mittlere Proportionalzahl suchen. Man setze $\div 3 - x - 9$. Hieraus hat man $3 + 9$ oder $12 = 2x$ und $\frac{12}{2} = \frac{2x}{2}$ giebt $6 = x$. Also hat man die stetige Proportion $\div 3 - 6 - 9$, oder 6 ist hier mittlere Proportionalzahl.

Beweis. Dieser ist für 1) durch den Zusatz (§. 139.) und für 2) im §. 32. ausgedrückt. Daß aber $\frac{2x}{2} = x$ sey, erhellt aus § 43.

Anmerkung 1. Will man auch hier eine Prüfung anstellen, ob die aufgefundene Zahl für x auch das wahre Glied sey: so sehe man nur nach, ob die mittels der Bestimmung von x erhaltene neue Proportion wirklich 2 gleiche Verhältnisse enthalte, oder ob die Exponenten oder Unterschiede dieser Verhältnisse gleich seyen. Ist dieses der Fall: so ist die Proportion eine wahre, folglich die für x gesetzte Zahl die richtig gefundene (§. 135.).

Anmerkung 2. Unsere letzte Aufgabe ist von der im gemeinen Leben öfters vorkommenden Aufgabe: „Aus zwey gegebenen Zahlen das arithmetische Mittel zu finden," nicht verschieden. Die kurze Regel: „Man dividire die Summe beyder gegebenen Zahlen durch 2" ist, wie man sieht, die Auflösung der letzten Aufgabe selbst. Z. B. aus 13 und 35 ist das arithmetische Mittel $= \frac{13 + 35}{2} = \frac{48}{2} = 24$.

Zweyter Abschnitt.

Von
den geometrischen Proportionen.

§. 142. Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt aus den äußersten Gliedern gleich dem Produkte aus den mittleren.

Beyspiel. Es sey die Proportion
2 : 8 = 3 : 12; hier ist nun
2 . 12 = 8 . 3, d. i. 24 = 24.

Beweis. In der geometrischen Proportion ist nach §. 134. im Vergleiche mit §. 135. das vierte Glied das Produkt aus dem dritten in den Exponenten des zweyten Verhältnisses; multiplizirt man also dieses Produkt noch durch das erste Glied: so enthält dieses Produkt 1) das dritte, 2) das erste Glied und 3) den Exponenten, als Faktoren.

Eben so ist das zweyte Glied das Produkt aus dem ersten in den Exponenten des ersten Verhältnisses. Multiplizirt man daher dieses Produkt noch durch das dritte Glied: so enthält dieses Produkt als Faktoren 1) das erste, 2) das dritte Glied, und 3) den Exponenten.

Nun sind aber die Exponenten beyder Verhältnisse ein und derselbe (§. 135.); also sind beyde Produkte, also auch die im Lehrsatze ausgedrückten Produkte einander gleich.

§. 143. Zusatz 1. Also ist in der stetigen geometrischen Proportion das Faktum aus den äußersten Gliedern gleich dem Quadrate des mittleren Gliedes (§. 135.); z. B. 2 : 6 = 6 : 18; oder ∺ 2 : 6 : 18; wo 2 . 18 = 6^2, oder 36 = 36 ist.

§. 144. Zusatz 2. Hat man also je 2 gleiche Produkte: so bilden ihre Faktoren eine geometrische Proportion, so, daß die Faktoren des einen Produktes die beyden äußeren, und die Faktoren des andern Produktes die beyden mitt-

leren Glieder ausmachen. Man drückt dieß kurz so aus: die Faktoren von 2 gleichen Produkten sind umgekehrt proportional.

Beyspiel. $6 \times 3 = 2 \times 9$. Hieraus erhält man die geometrische Proportion.

$3 : 2 = 9 : 6$
oder $6 : 9 = 2 : 3$
oder $2 : 6 = 3 : 9$
oder $2 : 3 = 6 : 9$

Anmerkung. Ich habe dieses Beyspiel mit Fleiß in diesen 4 Proportionen gegeben, um zu zeigen, daß man mit jeder Proportion soviele Veränderungen vornehmen darf, als man will, solange nicht die Gleichheit der Produkte aufgehoben wird.

Und aus §. 143. folgt auf dieselbe Art, wie vorhin, daß die Zahl, deren Quadrat dem Produkte zweyer andern Zahlen gleich ist, die mittlere geometrische Proportionalzahl ist zwischen jenen beyden Zahlen; wenn z. B. $2 . 8 = 4^2$; so gilt die Proportion $\div$ 2 : 4 : 8, oder 8 : 4 : 2.

§. 145. Aufgabe 1. Zu drey gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Man multiplizire die zweyte Zahl mit der dritten, und dividire das Produkt durch die erste.

Beyspiel. Es seyen die 3 Zahlen 2, 8, 16, zu welchen die vierte geometrische Proportionalzahl soll gesucht werden. Nun ist $8 \cdot 16 = 128$, und $\frac{128}{2} = 64$; folglich ist 64 die gesuchte Zahl.

Diese Auflösung drückt die goldne Regel aus.

Beweis. Denkt man sich wieder, wie oben (§. 140.), die drey gegebenen Zahlen mit x, als dem Stellvertreter der unbekannten Zahl, in eine Proportion gebracht: so ist das Produkt aus der ersten gegebenen Zahl in x gleich dem Produkte der 2 mittleren (§. 142.). Beyde gleiche Produkte durch den Faktor von x, d. i. durch die erste gegebene Zahl

dividirt (§. 32.), erhält man den Werth von x, oder die gesuchte Zahl (§. 43.).

So ist nach dem Beyspiele eigentlich die Aufgabe diese: $2 : 8 = 6 : x$. Aber $2 \cdot x = 8 \cdot 16$, und $\frac{2x}{2} = \frac{8 \cdot 16}{2}$, woraus $x = 64$ gefunden wird.

§. 146. **Aufgabe 2. Zwischen zwey gegebenen Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden.**

Auflösung. Man ziehe aus dem Produkte beyder Zahlen die Quadratwurzel aus, welche die gesuchte Zahl ist.

Beyspiel. Es seyen die gegebenen Zahlen 4 und 16. Das Produkt dieser Zahlen ist 64, und $\sqrt{64} = 8$; also ist 8 die gesuchte mittlere Proportionalzahl.

Beweis. Man denke sich wieder, wie §. 141., statt der unbekannten Zahl den Buchstaben x zwischen den gegebenen Zahlen als mittleres Glied der Proportion gesetzt: so erhält man nach §. 143. das Produkt aus x in x, oder x^2 gleich dem Produkte aus den zwey gegebenen Zahlen, als den äußeren Gliedern. Nun ist aber x die Quadratwurzel aus x^2. Ziehe ich daher auch dieselbe Wurzel aus dem Produkte beyder gegebenen Zahlen aus: so wird, wegen der gleichen hier vorgenommenen Veränderung, x gleich dieser Quadratwurzel.

So hat man nach dem Beyspiele eigentlich diese Proportion anzustellen $4 : x = x : 16$; wo also $x^2 = 4 \cdot 16 = 64$. Aber $\sqrt{x^2} = x$; und $\sqrt{64} = 8$; also ist $x = 8$, oder die gesuchte mittlere Proportionalzahl.

§. 147. **Lehrsatz. Multiplizirt man die vorhergehenden Glieder zweyer oder mehrerer gegebenen geometrischen Proportionen miteinander, und eben so die nachfolgenden: so bilden auch die erhaltenen Produkte eine geometrische Proportion.**

Beyspiel. Es seyen die 3 Proportionen:

$$1 : 2 = 3 : 6$$
$$3 : 9 = 7 : 21$$
$$1 : 4 = 3 : 12$$
$$\overline{3 : 72 = 63 : 1512.}$$

Da nun $\frac{72}{3} = 24$, und $\frac{1512}{63} = 24$, d. i. weil derselbe Exponent 24 in den beyden Verhältnissen der Produkte vorhanden ist: so machen sie eine Proportion (§. 135.).

Beweis. Denkt man sich die Produkte aus den äußern Gliedern jeder Proportion untereinander gesetzt, und eben so die Produkte aus den mittleren Gliedern: so ist das Produkt aus der erstern Produktenreihe gleich dem Produkte aus der zweyten Produktenreihe (§§. 142. 18.). Löst man diese gleichen Produkte in ihre Faktoren nach §. 144. auf: so erhält man die im Lehrsatze ausgedrückte Proportion.

So ist

$$\left.\begin{array}{l}1 \cdot 6 = 2 \cdot 3\\ 3 \cdot 21 = 9 \cdot 7\\ 1 \cdot 12 = 4 \cdot 3\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{also } 1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 21 \cdot 1 \cdot 12 = 2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3;\\ \text{folgl. } 1 \cdot 3 \cdot 1 : 2 \cdot 9 \cdot 4 = 3 \cdot 7 \cdot 3 : 6 \cdot 21 \cdot 12.\end{array}$$

Anmerkung. Dieses Verfahren mit mehreren geometrischen Proportionen nennt man das Zusammensetzen derselben. In der zusammengesetzten goldnen Regel wird es öfters angewendet. Zur leichtern Anwendung desselben aber leitet folgender Lehrsatz an:

§. 148. Lehrsatz. Das geometrische Verhältniß bleibt dasselbe, man mag seine Glieder mit derselben Zahl multipliziren, oder durch das gemeinschaftlich größte Maß dividiren.

Beyspiel. Das Verhältniß 4 : 3 ist gleich dem Verhältnisse 4 · 5 : 3 · 5 oder 20 : 15. Denn vom ersten Verhältnisse ist $\frac{4}{3}$ der Exponent und vom zweyten $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ (§. 75.) derselbe Exponent (§. 135.); und umgekehrt.

Beweis. Bey gleicher Erhöhung des ersten, wie des zweyten Gliedes eines Verhältnisses geht dieses Glied aus dem ersten gerade so hervor, wie das zweyte einfache Glied

aus dem ersten einfachen hervorgieng; und umgekehrt. Denn die Multiplikation oder Division durch dieselbe Zahl trifft nicht den Exponenten, sondern immer nur das erste Glied, das auch im zweyten Gliede enthalten ist. Daher muß bey dieser Veränderung auch der Exponent des Verhältnisses derselbe bleiben. So ist $3 : 6 = 3 . 4 : 6 . 4$. Im Verhältnisse nun $3 : 6$ ist der Exponent 2, welcher bey dieser Multiplikation ungeändert bleibt, was man offenbar sieht, wenn man so setzt: $3 . 4 : 3 . 4 . 2$, oder $12 : 12 . 2$. Dividirt man letzteres Verhältniß wieder, nämlich $\frac{12}{4} : \frac{12}{4} . 2 = 3 : 3 . 2$: so erhellet wieder offenbar, daß auch diese Division den Exponenten nicht angehe.

Zusatz. So oft man daher, in einem vorkommenden Falle der goldnen Regel, Verhältnisse zusammensetzen muß: so kann man sich dieß gleich anfangs dadurch erleichtern, daß man die Faktoren, welche in den ersten wie in den zweyten Gliedern der Verhältnisse vorkommen, wegläßt; indem dieß dasselbe ist, als dividirte man die Produkte durch das gemeinschaftliche Maß. Man hat z. B. aus den zusammenzusetzenden Verhältnissen

	1	:	2
	2	:	4
	4	:	8
das Verhältniß	1	:	8

statt 8 : 64, indem man sogleich die Faktoren 2 und 4, welche in den ersten und zweyten Gliedern vorkommen, wegläßt.

Durch dieses Verfahren, verbunden mit der Verwechslung des dritten und zweyten Gliedes (§. 144.) (was man das Alterniren nennt) beschleuniget man oft die Rechnung bey einer vorkommenden Proportion sehr; z. B. diene

die Proportion	$1400 : 126 = 300 : x$
oder durch 14 dividirt	$100 : 9 = 300 : x$
oder durch Verwechsl.	$100 : 300 = 9 : x$
und durch Division	$1 : 3 = 9 : x$

Hieraus wird x durch bloße Multiplikation der 2 mittleren Glieder gefunden.

Kommen aber Brüche von gleichen Nennern als Glieder eines Verhältnisses vor: so kann man nur die Nenner weglassen, was dasselbe ist, als hätte man durch den Nenner beyde Glieder vervielfacht, z. B. $\frac{11}{4} : \frac{7}{4} = 11 : 7$. Sind aber jene Glieder Brüche mit verschiedenen Nennern: so darf man nur zur Vermeidung des Rechnens mit diesen Brüchen jeden Zähler mit des anderen Bruches Nenner multipliziren, aber den gemeinschaftlichen Nenner, wie vorhin den Nenner 4, weglassen. Z. B. Man habe das Verhältniß $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$; dafür kann man setzen $3 \cdot 7 : 5 \cdot 4$, d. i. $21 : 20$. — Wenn ferner nur ein Glied des Verhältnisses ein Bruch ist: so multiplizirt man blos das andere Glied mit dem Nenner des Bruches: z. B. statt $\frac{3}{4} : 7$ setze man $3 : 4 \cdot 7 = 3 : 28$.

Wenn aber umgekehrt die Glieder eines Verhältnisses Brüche mit einerley Zähler sind, z. B. $\frac{3}{4} : \frac{3}{5}$, so läßt man die Zähler weg, und setzt die verwechselten Nenner in Verhältniß, d. i. statt jenes Verhältnisses setzt man $5 : 4$. Denn hätte man die Brüche auf einerley Nenner gebracht, wie vorhin: so hätte man gesetzt: $3 \cdot 5 : 3 \cdot 4$; aber nach §. 148. kann man den Faktor 3 weglassen, also setzen, $5 : 4$.

Verhältnisse, wie wir sie im vorigen Beyspiele zusammensetzten, nämlich gleiche Verhältnisse, geben ein Verhältniß, welches der Arithmetiker das Würfelverhältniß nennt. Da nämlich jene 3 Verhältnisse einander gleich sind: so ist die Zusammensetzung derselben nichts, als eine wiederholte Zusammensetzung eines und desselben Verhältnisses, wodurch das verdreyfachte (triplizirte) Verhältniß, oder das Verhältniß der Einheit zum Würfel des Exponenten eines jener Verhältnisse entsteht. Statt nämlich zu $1 : 2$ das Verhältniß $2 : 4$ zu setzen, kann ich auch, weil $1 : 2$ gleich ist $2 : 4$ ist, setzen $\begin{matrix} 1 : 2 \\ 1 : 2 \end{matrix}$, und, statt das Verhältniß $4 : 8$ zu den vorigen zu setzen, kann ich nochmals das diesem Verhältnisse gleiche Verhältniß $1 : 2$ hinzusetzen; woraus man hat:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 : 2 \\ 1 : 2 \\ 1 : 2 \end{matrix} \right\} = 1 : 8 = 1 : 2^3$$

Eben so sieht man, daß, wenn man nur 2 jener Verhältnisse, die gleich sind, zusammensetzt, das verzweyfachte (duplizirte) Verhältniß, oder das Verhältniß der Quadrate, oder der Einheit zum Quadrate des Exponenten entsteht. So ist

$\begin{matrix}(1 : 2)\\(3 : 6)\end{matrix} = 3 : 12 = 3^2 : 6^2 = 1 : 2^2$; was aus demselben Exponenten 4 erhellt.

§. 149. Lehrsatz. Bey mehreren gleichen geometrischen Verhältnissen verhält sich die Summe ihrer ersten Glieder zur Summe ihrer zweyten oder nachfolgenden Glieder, wie jedes erste Glied zum zweyten eines und desselben Verhältnisses.

Beyspiel. Es seyen die 3 gleichen Verhältnisse 1 : 2; 2 : 4; 6 : 12, wo immer der Exponent = 2 ist. Es ist nun 1 + 2 + 6 : 2 + 4 + 12 = 1 : 2, oder = 2 : 4, oder = 6 : 12. Denn hier ist 1 + 2 + 6 = 9 und 2 + 4 + 12 = 18; aber $\frac{18}{9} = 2$; wie $\frac{2}{1}$, oder $\frac{4}{2}$ auch = 2 ist (§. 135).

Beweis. Jedes folgende Glied ist überhaupt das Vielfache vom ersten (§. 124.); da nun hier die Verhältnisse gleich sind: so ist die Summe der ersten Glieder die Summe der einfachen Zahlen, und die Summe der zweyten Glieder die Summe der gleichvielfachen Zahlen von jenen einfachen. Aber man erhält diese Summe, wenn man die Summe der einfachen Zahlen mit der Zahl, die als Faktor in jedem Vielfachen vorkömmt, d. i. mit dem Exponenten eines der Verhältnisse multiplizirt; dieß heißt: die Summe der folgenden Glieder ist das Sovielfache von der Summe der ersten Glieder, als der Exponent eines der Verhältnisse anzeigt. Nun ist aber auch jedes zweyte Glied irgend eines Verhältnisses eben das Sovielfache vom ersten Gliede, folglich ist die im Lehrsatze ausgedrückte Proportion wahr.

So ist $1 + 2 + 6 = 9$, und $2 + 4 + 12 = 1 . 2 + 2 . + 6 . 2 = (1 + 2 + 6) . 2 = 9 . 2$; d. i. die Summe der Hinterglieder ist hier das Zweyfache der Summe (9) der Vorderglieder, gleichwie auch jedes Hinterglied in einem jener 3 Verhältnisse das Zweyfache seines Vordergliedes ist. Daher giebt jenes Verhältniß der Summen denselben Exponenten, wie jedes der gegebenen Verhältnisse.

Anmerkung. Was hier von der Summe gesagt ist, läßt sich eben so von der Differenz beweisen.

Dritter Abschnitt.

Anwendung der Lehre von den Proportionen.

I. Anwendung der arithmetischen Proportionen auf die Zeitrechnung.

§. 150. Vorkenntnisse. Die Zeit von einer Frühlingsnachtgleiche zur andern, binnen welcher die Sonne (oder an ihrer Stelle die Erde) alle Zeichen des Thierkreises durchläuft, wird Sonnenjahr (tropisches), oder auch schlechthin Jahr genannt. Die Zeit, innerhalb welcher die Sonne zweymal ihren höchsten Stand am Himmel hat, (für einen bestimmten Erdort kulminirt), oder die Zeit von einem Mittag zum andern heißt Sonnentag, auch schlechthin Tag.

Das Jahr hat genau 365 Tage, 5 St. 48′ 45 ½″ (vergl. §. 133. Anmerk. 4.). Allein das bürgerliche Jahr, welches nur mit einem ganzen Tage anfangen und enden kann, befaßt entweder 365, oder 366 Tage. Das Jahr von 365 T. nennt man ein gemeines Jahr (annus communis), das

andere von 366 Tagen heißt **Schaltjahr** (annus bissextilis); jedes dieser Jahre pflegt man überhaupt zu setzen = 12 Monate = 52 Wochen. In Betreff des Schaltjahres ist nämlich zu bemerken, daß man aus dem wahren Sonnenjahre jene 5 St. 48′ 45″ weglasse, und dafür 6 ganze Stunden rechne. Weil nun diese in 4 Jahren einen Tag ausmachen: so wird wegen dieser im bürgerlichen Jahre vernachläßigten Stunden in jedem 4t. Jahre ein Tag (dies intercalaris) zwischen dem 23 und 24. Februar **eingeschaltet**, wodurch denn der Februar, welcher sonst nur 28 Tage hat, nun 29 T. erhält.

Wenn man daher sehen will, ob ein gegebenes Jahr z. B. 1813 ein Schaltjahr, oder ein gemeines Jahr sey: so darf man nur die Jahreszahl durch 4 dividiren. Bleibt kein Rest: so hat man ein Schaltjahr; im entgegengesetzten Falle zeigt der Rest, wieviele gemeine Jahre man noch zählen müsse, bis wieder ein Schaltjahr komme. So ist $\frac{1813}{4}$ = 47 mit dem Reste 3, welcher zeigt, daß 1813 das erste gemeine sey, also 1812 ein Schaltjahr war, und 1816 wieder ein solches seyn müsse. Diese Regel gilt jedoch nicht für alle ganze Jahrhunderte. Weil man nämlich, indem man statt 5 St. 48′ 45″ 6 ganze Stunden nimmt, zuviel, und zwar in 400 Jahren einen ganzen Tag zuviel rechnet; so ist erst jedes 4te Jahrhundert ein Schaltjahr. So ist unter den Jahren 1700, 1800, 1900, 2000 erst das letztere wieder ein Schaltjahr.

Anmerkung. Auch der bürgerliche Tag stimmt nicht immer mit dem Sonnentag überein, so, daß die bürgerlichen Uhren immer 12 Uhr zeigten, wenn die Sonne im Mittagskreise eines Ortes steht. Diese Uebereinstimmung hat vielmehr nur 4mal des Jahres statt; gegen den 15ten April, 15ten Junius, 31ten August und 24ten Dezember. Zu jeder andern Zeit bleiben unsere bürgerliche Uhren, welche vermöge ihres gleichförmig schnellen Ganges gleichlange bürgerliche Tage zeigen sollen, entweder hinter dem wah-

ren Mittage um etwas zurücke, oder zeigen diesen etwas früher, als die Sonnenuhren. Jedoch kann dieser Unterschied nie über 16′ 12″ betragen.

§. 151. Von dem Sonnenjahre unterscheidet sich das Mondjahr = 12 Mondsmonaten, dadurch, daß dieses nur 354 T. 8 St. 48′ 36″ begreift, so, daß demnach 32 Sonnenjahre gleich sind 33 Mondjahren Ein solches bürgerliche Mondjahr, wobey gar keine Rücksicht auf den Sonnenlauf genommen ist, ist das muhammedanische, oder türkische (auch arabische) Jahr. In diesem Jahre haben die Monate abwechselnd 29 und 30 Tage. Um ferner jene 8 St. 48′, welche in den einzelnen Jahren vernachläßigt werden, wieder im Ganzen einzubringen, haben die Türken eine Periode von 30 Jahren, und geben dem letzten Monate der Jahre 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26, 29 statt 29 nun 30 Tage.

Allein wegen der vernachläßigten 36″ fragt sich, wann wird das türkische Jahr schon um 1 ganzen Tag vom wahren Mondlaufe abweichen? Man suche, der wievielste Theil 36″ von 1 T., d. i. von 24. 60. 60″ (§. 123.) oder von 86400 Sekunden seyen, indem man diese Zahl durch 36 dividirt. Der Quotient 2400 zeigt, daß ein türkisches Jahr um $\frac{1}{2400}$ eines Tages, also 2 Jahre um $\frac{2}{2400}$ und demnach erst 2400 verflossene Jahre um $\frac{2400}{2400}$ eines T., d. i. um 1 ganzen T. vom wahren Mondlaufe abweichen.

§. 152. Ferner fangen die Türken ihre Zeitrechnung von Mahomed's Flucht an. Diese geschah am 16ten Julius 622 unserer christlichen Zeitrechnung; demnach fällt dieses Jahr mit dem 1ten türkischen J. zusammen. Will man daher finden, welches J. die Türken im J. 1813 schreiben: so findet man durch die arithmetische Proportion: 622 — 1813 = 1 — x das Jahr 1192 (= 1813 + 1 — 622). Weil nun aber, wie wir oben bemerkten, 32 solcher Sonnenjahre, wie wir sie hier fanden, 33 Mondjahre machen: so muß man noch die geometr. Proportion setzen:

$32 : 1192 = 33 : x$, wo $x = \frac{1192 \cdot 33}{32} = 1229$ gefunden wird. Der Türke schreibt also in unserem J. 1813 die Jahre 1228 und 1229, indem nämlich in jedes unserer Jahre von 365 das Ende und der Anfang eines folgenden türkischen Jahres, welches nur 354, oder 355 T. hat, fallen muß. Die genaue Rechnung giebt, daß der Anfang des türk. J. 1228 am 4ten Januar und des J. 1229 am 24ten Dezember 1813 sey. Wenn man nun 1229 durch 30 (der Anzahl Jahre einer Periode) dividirt: so findet man den Quotienten 40 mit dem Reste 29. Dieses zeigt, daß das 1229te türk. J. das 29te in der 41ten Periode sey. Da nun nach dem obigen dieses Jahr 355 T. hat, und 1814 kein Schaltjahr (§. 150.) ist: so endet sich jenes 1229te J. der Türken am 13ten Dezember 1814 und am 14ten Dez. desselben J. fängt das 1230te J. der Türken an.

§. 153. Auch das gegenwärtig übliche Jahr der Juden ist eigentlich ein Mondjahr von 354 T. oder 12 Monaten, welche abwechselnd 29 und 30 Tage haben. Allein die Juden suchten dieses Jahr zugleich mit dem Sonnenlaufe dadurch zu vereinigen, daß sie 1) das Jahr immer mit dem ersten Neumonde nach der Herbstnachtgleiche anfangen lassen; 2) daß sie eine immer wiederkehrende Reihe von 19 Jahren festsetzen, in welchen das 3, 6, 8, 11, 14, 19te Jahr Schaltjahre von 13 Monaten sind, indem zwischen den 6ten und 7ten Monate ein Monat eingeschaltet wird.

Uebrigens zählen die Juden ihre Jahre von Entstehung der Welt an (a M. C.). So ist das 1813te J. unserer Zeitrechnung das 5573te Jahr der Welt, und nimmt seinen Anfang den 25ten September.

§. 154. Nebst den vorhergehenden Zeitrechnungen der Türken und Juden sind diejenigen die merkwürdigsten, in welchen die Jahre von folgenden Hauptepochen an gezählt werden:

1) Vom Anfange der olympischen Spiele (olympiadum).

2) von Erbauung der Stadt Rom (ab V. C.);
3) nach Christi Geburt (a Chr. N.);
Zu diesen Zeitrechnungen kömmt
4) die nach der Julianischen Periode;
5) die nach nabonassarischen Jahren.

I. Olympiade (als Zeitrechnung der Griechen) ist ein Zeitraum von 4 Jahren, nach deren Verlauf die Feyer der olympischen Spiele, bey welchen sich die griechische Jugend im Laufen, Springen, Fahren, Fechten ... zu üben pflegte, und die Sieger mit Oelkränzen geschmückt wurden, immer wiederkehrte. Das erste Jahr der christlichen Zeitrechnung (aera) ist das 777ste J. der Olympiaden, oder das 1ste Jahr der 195ten Olympiade.

Wenn man daher wissen will, das wievielste Jahr der Olympiaden ein gegebenes Jahr z. B. 1813 der christl. Aere sey: so darf man nur die Proportion setzen:

1 — 1813 = 777 — x, wo x = 1813 + 777 — 1 = 2589, d. i. das Jahr 1813 ist das 2589te J. der Olympiaden, oder (da man durch Division mit 4 den Quotienten 647 mit dem Reste 1 bekömmt) das 1ste J. der 648ten Olympiade.

II. Das erste Jahr unserer Aere fällt zusammen mit dem 754ten Jahre nach Erbauung Roms. Man findet daher durch die Proportion:

1 — 1813 = 754 — x, daß das J. 1813 das 2566te V. C. sey. Oder: Konstantin wurde im J. 306 a Chr. N. zum römischen Kayser gewählt: das wievielste Jahr V. C. war dieses? Man hat 1 — 306 = 754 — x, also x = 1059 V. C.

III. Zum Behufe der Fertigung unserer Kalender hat man 3 Cykeln (cyclos), oder immer wieder in sich zurückkehrende Reihen angenommen; a) den Mondcykel, eine Reihe von 19 Jahren, nach welchen die Neumonde wieder auf dieselben Tage des bürgerlichen Jahres fallen. Jede dieser 19 Zahlen heißt goldene Zahl (numerus aureus), weil die Athenienser, froh, daß durch die Auffindung

dieser Periode Monds- und Sonnenlauf miteinander in Verbindung gebracht waren, jenen Cykel mit goldenen Zeichen in Marmor eingraben ließen. Uebrigens findet man die goldene Zahl für ein gegebenes Jahr, wenn man die um 1 vermehrte Jahreszahl durch 19 dividirt; der Rest ist die goldene Zahl; oder diese ist 19 selbst, wenn kein Rest bleibt. So ist in $\frac{1814+1}{19}$ der Rest 10, also 10 die goldene Zahl für 1814.

Mit diesem Cykel ist in unserem Kalender der Epaktencykel verbunden, d. i. eine immer wiederkehrende Reihe von 19 Zahlen, welche für ein jedes Jahr zeigen, um wieviele Tage der letzte Neumond dem Anfange jenes Jahres vorhergieng. Dieser Epaktencykel ist für 1800 — 1900 folgender:

Goldne Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Epakte	*	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII

Das Sternchen bezeichnet, daß der Neumond selbst auf den 1sten Januar falle, die Epakte folglich 0 sey.

Da nun für 1814 die goldene Zahl 10 ist: so ist die Epakte IX. Auf diejenigen Tage nun, welche im immerwährenden Gregorianischen Kalender, den wir hier beyfügen, diese Epakte beygeschrieben haben, fallen jedesmal die Neumonde.

Anmerkung. Weil der Mondsmonat nicht ganz 30 Tage hat, aber doch größer als 29 T. ist: so sind in den Mon 2, 4, 6 u. s. w. die Zahlen XXV. XXIV nebeneinander gesetzt, um so 29 T. zu erhalten. Weil ferner in 19 Jahren keine 2 Neumonde auf denselben Tag fallen können: so schreibt man 25 neben XXVI, welche Epakte denn nicht in denjenigen Jahrhunderten vorkömmt, in welchen sich XXV. XXIV zusammen finden.

Immerwährender Gregorianischer Kalender,

um die Neumonde, Wochentage und beweglichen Feste zu finden.

T. d. M.	Januar Epakten	S. B.	Februar Epakten	S. B.	März Epakten	S. B.	April Epakten	S. B.
1	*	A	XXIX	D	*	D	XXIX	G
2	XXIX	B	XXVIII	E	XXIX	E	XXVIII	A
3	XXVIII	C	XXVII	F	XXVIII	F	XXVII	B
4	XXVII	D	XXVI	G	XXVII	G	25.XXVI	C
5	XXVI	E	xxv.xxiv	A	XXVI	A	xxv.xxiv	D
6	25.XXV	F	XXIII	B	XXV 25	B	XXIII	E
7	XXIV	G	XXII	C	XXIV	C	XXII	F
8	XXIII	A	XXI	D	XXIII	D	XXI	G
9	XXII	B	XX	E	XXII	E	XX	A
10	XXI	C	XIX	F	XXI	F	XIX	B
11	XX	D	XVIII	G	XX	G	XVIII	C
12	XIX	E	XVII	A	XIX	A	XVII	D
13	XVIII	F	XVI	B	XVIII	B	XVI	E
14	XVII	G	XV	C	XVII	C	XV	F
15	XVI	A	XIV	D	XVI	D	XIV	G
16	XV	B	XIII	E	XV	E	XIII	A
17	XIV	C	XII	F	XIV	F	XII	B
18	XIII	D	XI	G	XIII	G	XI	C
19	XII	E	X	A	XII	A	X	D
20	XI	F	IX	B	XI	B	IX	E
21	X	G	VIII	C	X	C	VIII	F
22	IX	A	VII	D	IX	D	VII	G
23	VIII	B	VI	E	VIII	E	VI	A
24	VII	C	V	F	VII	F	V	B
25	VI	D	IV	G	VI	G	IV	C
26	V	E	III	A	V	A	III	D
27	IV	F	II	B	IV	B	II	E
28	III	G	I	C	III	C	I	F
29	II	A			II	D	*	G
30	I	B			I	E	XXIX	A
31	*	C			*	F		

T. d. M.	May Epakten	S. B.	Junius Epakten	S. B.	Julius Epakten	S. B.	August Epakten	S. B.
1	XXVIII	B	XXVII	E	XXVI	G	xxv xxiv	C
2	XXVII	C	25.XXVI	F	25. XXV	A	XXIII	D
3	XXVI	D	xxv.xxiv	G	XXIV	B	XXII	E
4	25. XXV	E	XXIII	A	XXIII	C	XXI	F
5	XXIV	F	XXII	B	XXII	D	XX	G
6	XXIII	G	XXI	C	XXI	E	XIX	A
7	XXII	A	XX	D	XX	F	XVIII	B
8	XXI	B	XIX	E	XIX	G	XVII	C
9	XX	C	XVIII	F	XVIII	A	XVI	D
10	XIX	D	XVII	G	XVII	B	XV	E
11	XVIII	E	XVI	A	XVI	C	XIV	F
12	XVII	F	XV	B	XV	D	XIII	G
13	XVI	G	XIV	C	XIV	E	XII	A
14	XV	A	XIII	D	XIII	F	XI	B
15	XIV	B	XII	E	XII	G	X	C
16	XIII	C	XI	F	XI	A	IX	D
17	XII	D	X	G	X	B	VIII	E
18	XI	E	IX	A	IX	C	VII	F
19	X	F	VIII	B	VIII	D	VI	G
20	IX	G	VII	C	VII	E	V	A
21	VIII	A	VI	D	VI	F	IV	B
22	VII	B	V	E	V	G	III	C
23	VI	C	IV	F	IV	A	II	D
24	V	D	III	G	III	B	I	E
25	IV	E	II	A	II	C	*	F
26	III	F	I	B	I	D	XXIX	G
27	II	G	*	C	*	E	XXVIII	A
28	I	A	XXIX	D	XXIX	F	XXVII	B
29	*	B	XXVIII	E	XXVIII	G	XXVI	C
30	XXIX	C	XXVII	F	XXVII	A	XXV	D
31	XXVIII	D			25.XXVI	B	XXIV	E

T. d. M.	September Epakten	S. B.	October Epakten	S. B.	November Epakten	S. B.	Dezember Epakten	S. B.
1	XXIII	F	XXII	A	XXI	D	XX	F
2	XXII	G	XXI	B	XX	E	XIX	G
3	XXI	A	XX	C	XIX	F	XVIII	A
4	XX	B	XIX	D	XVIII	G	XVII	B
5	XIX	C	XVIII	E	XVII	A	XVI	C
6	XVIII	D	XVII	F	XVI	B	XV	D
7	XVII	E	XVI	G	XV	C	XIV	E
8	XVI	F	XV	A	XIV	D	XIII	F
9	XV	G	XIV	B	XIII	E	XII	G
10	XIV	A	XIII	C	XII	F	XI	A
11	XIII	B	XII	D	XI	G	X	B
12	XII	C	XI	E	X	A	IX	C
13	XI	D	X	F	IX	B	VIII	D
14	X	E	IX	G	VIII	C	VII	E
15	IX	F	VIII	A	VII	D	VI	F
16	VIII	G	VII	B	VI	E	V	G
17	VII	A	VI	C	V	F	IV	A
18	VI	B	V	D	IV	G	III	B
19	V	C	IV	E	III	A	II	C
20	IV	D	III	F	II	B	I	D
21	III	E	II	G	I	C	*	E
22	II	F	I	A	*	D	XXIX	F
23	I	G	*	B	XXIX	E	XXVIII	G
24	*	A	XXIX	C	XXVIII	F	XXVII	A
25	XXIX	B	XXVIII	D	XXVII	G	XXVI	B
26	XXVIII	C	XXVII	E	25. XXVI	A	25. XXV	C
27	XXVII	D	XXVI	F	xxv. xxiv	B	XXIV	D
28	XXVI. 25	E	25 XXV	G	XXIII	C	XXIII	E
29	xxv. xxiv	F	XXIV	A	XXII	D	XXII	F
30	XXIII	G	XXIII	B	XXI	E	XXI	G
31			XXII	C			19. XX	A

b) Auch verband man in unserm Kalender mit dem Mondcykel den Sonnen- oder Sonntagsbuchstabencykel, d. i. eine Reihe von 28 Jahren, nach deren Verlauf die Sonntage wieder auf dieselbe Monatstage fallen. Dieser für 1800 — 1900 gültige Cykel ist:

1	ED		GF	9	BA	13	DC	7	FE	21	AG	25	CB
2	C	6	E	10	G	14	B	18	D	22	F	26	A
3	B	7	D	11	F	15	A	19	C	23	E	27	G
4	A	8	C	12	E	16	G	20	B	24	D	28	F.

Im immerwährenden Kalender sind nämlich dem 1sten Januar und so den folgenden Tagen die 7 Buchstaben von A — G in immer wiederkehrender Ordnung beygeschrieben. Wenn man nun zu einer gegebenen Jahreszahl z. B. 1814 die Zahl 9 addirt, und die Summe durch 28 dividirt, den Rest denn unter den vorigen Zahlen aufsucht: so steht daneben der Sonntagsbuchstabe. So ist, weil die Division $\frac{1814+2}{28}$ den Rest 3 giebt, B der Sonntagsb. dieses J. Ist o der Rest; so ist der der Zahl 28 beygeschriebene Buchstab F der Sonntagsb. Ist aber der Rest z. B. 5: so gilt der erste Buchst. G bis zum 23ten Februar, nachher aber F als Sonntagsb. eines solchen Schaltjahres. Alle Tage nun, welche im immerwährenden Kalender B beygeschrieben haben, sind im J. 1814 Sonntage.

Mit Hilfe dieses für ein gegebenes Jahr aufgefundenen Sonntagsbuchstabens findet man, auf welchen Wochentag das Datum irgend eines Ereignisses, z. B. der Geburt eines Menschen, oder einer sonstigen merkwürdigen Begebenheit falle. Z. B. in der Nacht vom 24. auf den 25ten Okt. 1813 wurde die Stadt Würzburg bombardirt. Da nun der Rest aus $\frac{1813+2}{28}$, nämlich 2, zeigt, daß der Sonntagsb. für 1813 C sey, dieser aber im immerwährenden Kalender dem 24ten Oktober beygeschrieben ist: so war jenes Bombardement in der Nacht eines Sonntages auf den Mondtag.

Eine vorzügliche Anwendung dieses Cykels ist die Bestimmung des Osterfestes. Der Tag, an welchem der Ostervollmond eintritt, heißt die Ostergrenze, weil

nach einer Verordnung der Kirchenversammlung zu Nicäa (im J. 325) der Ostertag jedesmal an demjenigen Sonntage, der auf den 1sten Vollmond nach der Frühlingsnachtgleiche den 21. März (Ostervollmond), oder, im Falle dieser Vollmond auf einen Sonntag falle, erst am nachfolgenden Sonntage gefeyert werden soll. Hierauf bezieht sich das folgende Täfelchen, wo A. April, M. März und die Zahlen 1, 2 ꝛc. die goldenen Zahlen bedeuten:

1.	13 A.	E	6.	18 A.	C	11.	24 M.	F	16.	29 M.	D
2.	2 A.	A	7.	7 A.	F	12.	12 A.	D	17.	17 A.	B
3.	22 M.	D	8.	27 M.	B	13.	1 A.	G	18.	6 A.	E
4.	10 A.	B	9.	15 A.	G	14.	21 M.	C	19.	26 M.	A.
5.	30 M.	E	10.	4 A.	C	15.	9 A.	A			

Beyspiel. Wann wird, oder wurde 1814 das Osterfest gefeyert? Aus obigen Rechnungen ist für dieses J. die goldene Zahl 10 und der Sonntagsb. B. Nun steht im vorigen Täfelchen bey 10 der 4te April mit C, diese Buchstaben laufen aber von C an so fort: C, D, E, F, G, A, B, so, daß B der 6te Buchst. nach C ist; demnach fällt das Osterfest 6 T. nach dem 4ten April, oder auf den 10. April.

e) Der Indiktionscykel ist eine Reihe von 15 Jahren oder 3 Lustra, nach welchen die von den römischen Kaysern auf 15 J. ausgeschriebenen Steuern wiederkehrten. Man findet die Indiktionszahl (Römerzinszahl), wenn man zur gegebenen Jahrszahl 3 addirt, die Summe durch 15 dividirt. Der Rest aus dieser Division, oder 15 ist die Indiktionszahl, wenn kein Rest bleibt. So ist der Rest aus $\frac{1814+3}{15}$, d. i. 2 diese Zahl für 1814.

IV. Das Produkt aus den Zahlen in den 3, bisher erörterten, Cykeln, nämlich 19. 28. 15 = 7980 Jahren, bildet die Julianische Periode, welche Jos. Scaliger zur Vereinfachung der Zeitrechnung vorschlug. In dieser Periode ist das 1ste Jahr der christl. Aere das 4714te, so, daß man immer die Jahreszahl in Jahren dieser Periode ausdrückt, wenn man zur gegebenen Jahrszahl noch 4713 addirt, so ist das Jahr 1814 das 1814 + 4713, d. i. das 6527te Jahr der

Jul. Per. — Und umgekehrt: will man finden, welches J. unserer Aere dem 6527ten der Jul. Per. entspreche, so setzt man: 4714 — 6527 = 1 — x, wo man x = (6527 + 1 — 4714) = 1814 findet.

Allein die Jahrszahl vor Chr. Geb. muß man von 4714 abziehen, um zu sehen, das wievielste Jahr der Jul. Per. jenes Jahr sey. Wenn man daher rücksichtlich der Zeitrechnung nach Olympiaden 776 J. vor C. G. von 4714 abzieht: so sieht man, daß der Anfang der Olympiaden mit dem 3938ten J. der Jul. Per. zusammentreffe. Sucht man nun, das wievielste J. der Olympiaden dem 6527ten der Jul. Per. entspreche, indem man setzt: 3938 — 6527 = 1 — x, wo x = 2590; so erhellt, daß das 6527te J. dieser Periode das 2590te J. der Olymp., oder das 1814te der christlichen Zeitrechnung sey.

Wenn man in Beziehung auf die Zeitrechnung von Erb. Roms von 1714 abzieht 753 J. vor Chr. Geb., so sieht man, daß das 1ste J. der Erb. Roms mit dem 3961ten J. der Jul. Per. zusammenfalle. So kann man denn jedes nach irgend einer Zeitrechnung angegebene Jahr in Jahren der Jul. Per., und umgekehrt ausdrücken. Z. B. in welchem Jahre sowohl dieser Per., als der christl. Zeitr., kam Konstantin der Große zur Regierung, wenn dieß im 1059ten V. C. geschehen ist? Das erste, nämlich 5019, findet man aus der Proportion: 1 — 1059 = 3961 — x; das zweyte, nämlich 306, aus der Proportion: 4714 — 5019 = 1 — x.

V. Die nabonasarische Aere, vom Nabonasar dem Gründer und ersten Könige des babylonischen Reiches so genannt, berühmt gemacht durch den griechischen Astronomen und Geographen Ptolomäus, (indem dieser größtentheils nach jener Aere die ägyptischen J. bezeichnete,) steht mit den vorhergehenden Zeitrechnungen auf gleicher Stufe der Gewißheit. Der erste Tag des 1sten nabonas. Jahres (der 1ste Thoth) fällt auf den 26ten Februar des 3967ten J. der Jul. Per., oder auf das J. 747 vor Chr. Geb.

Nabonasar. Jahre von	bis	Zum gegeb. nabon. J. zu addiren
1	227	3966
228	1688	3965
1689	3149	3964

Um nun ein gegebenes nabonas. J. auf die Julian. Per. zu bringen, darf man nur eine der im Schema gesetzten Zahlen zu jener Zahl addiren. Zieht man dann diese Summe von 4714 ab: so hat man das entsprechende J. vor Chr. Geb. Ist aber diese Summe, oder Zahl der Jul. Per. größer, als 4714: so zieht man von ihr die Zahl 4713 ab, so hat man das entsprechende J. nach Chr. Geb.

Beyspiel. Auf welches J. unserer Zeitrechnung fällt das J. 2562 der nabon. Aere? Es ist $(2562 + 3964) - 4713 = 1813$ nach Chr. Geb. Und umgekehrt: welches J. der nabon. Aere ist das J. 1814? Es ist $(1814 + 4713) - 3964 = 2563$, d. i. das sovielste nabon. J. trifft mit 1814 zusammen.

§. 155. In Betreff der Berechnung der Zeit kommen im bürgerlichen Leben besonders noch folgende Beyspiele vor:

Beyspiel 1. Kajus wurde im J. 1764 den 14. Jan. geboren; starb 1814 den 25ten Juny, wie alt war er? Wenn man 1764 von 1814 abzieht, eben so 14 von 25: so erhält man die Jahre und Tage, nämlich 50 J. 11 T. Da nun vom Jan. bis Jun. 5 Monate sind; so war des Kajus Alter 50 J. 5 Mon. 11 T.

Beyspiel 2. Kajus wurde im J. 1750 den 3. July geboren, und erreichte ein Alter von 60 J. 3 Mon. 12 T.; wann starb er? Man addire 60 zu 1750: so hat man das J. 1810; zum 3ten Jul. 3 Mon. und 12 T. addirt, hat man den 15ten Oktober; er starb also 1810 den 15ten Oktober.

Beyspiel 3. Kajus verheyrathet sich in einem Alter von 27 J. 6 Mon. 8 T.; seine Braut ist 21 J. 9 Mon. 24 T. alt: wie alt ist Kajus zur Zeit, wo dessen Frau in einem Alter von 48 J. 4 Mon. 7 T. stirbt?

Man setze die Proportion:

21 J. 9 Mon. 24 T. — 48 J. 4 Mon. 7 T. = 27 J. 6 Mon. 8 T — x, wo x $\left(= \begin{matrix} 75 \text{ J. } 10 \text{ M. } 15 \text{ T.} \\ -21. \quad 9. \quad 24 \end{matrix}\right)$ = 54 J. 21 T. gefunden wird.

II. Anwendung der geometrischen Proportionen, oder die goldene Regel.

§. 156. Erklärung und Eintheilung. Die goldne Regel, oder die sogenannte Regel detri (regula de tribus) ist, wie wir schon oben (§. 145.) bemerkten, nichts, als die Auflösung der Aufgabe, aus drey gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden. Man hat diese Regel die goldne genannt, weil sie im gemeinen Leben ihre häufige und sehr nützliche Anwendung findet.

Man theilt sie gewöhnlich in die einfache und zusammengesetzte goldene Regel, und in die Theilregel. Einfach heißt die goldne Regel, wenn zu 3 gegebenen Gliedern der Proportion, oder wie man es auch nennt, zu 3 gegebenen Sätzen der 4te gesucht, wenn sie folglich zur Lösung der Aufgabe nur einmal angewendet werden muß. Muß sie aber, um dieselbe gesuchte Zahl zu finden, zweymal angewendet werden, oder sind 5 Sätze gegeben: so heißt sie die zusammengesetzte Regel, und zwar bestimmt, die Regel von Fünfen (regula de quinque); muß sie, zur Auffindung desselben Gesuchten, dreymal angewendet werden, indem 7 Sätze gegeben sind: so heißt sie bestimmt die Regel von Sieben (regula de septem) u. s. w. Sie heißt also überhaupt zusammengesetzt, sobald sie zur Auflösung derselben Aufgabe mehrmals muß angewendet werden. Die sogenannte Kettenregel ist von jenen zuletzt genannten nicht wesentlich verschieden; sie hat ihren Namen lediglich von der eignen Stellung der Glieder der gegebenen Verhältnisse.

Die Theil- oder Repartions-Regel ist die Auflösung der Aufgabe, ein Ganzes in ungleiche Theile nach einem gegebenen Verhältnisse einzutheilen. Da man zur Lösung dieser Aufgabe die einfache Regel detri zur Auffindung verschiedener Zahlen mehrmals anwendet: so ist die Theilregel von der zusammengesetzten goldnen Regel zu unterscheiden.

Die Regel detri kann man auch, was ihre Anwendung betrifft, in die gerade und umgekehrte eintheilen, je nachdem nämlich die Fragegröße (d. i. diejenige, woraus die gesuchte Größe hervorgeht) das zweyte oder erste Glied der anzustellenden Proportion ausmacht. In diesem letzten Falle nämlich ist es eben soviel, als man hätte das erste Verhältniß umkehren müssen, um eine wahre Proportion zu bekommen (§. 136.).

Anmerkung. Ob man in einem vorgelegten Falle die goldne Regel zu dessen Lösung wirklich anwenden könne, muß durch die Urtheilskraft ausgemittelt werden. Den Prüfstein hiezu haben wir selbst an den im §. 136. aufgestellten Regeln. So sind z. B. Waaren und die zugehörigen Preise wahrhaft geometrisch proportional; denn z. B. dreymal größere Quantitäten derselben Waare haben auch dreyfach höhere Preise; ein viermal stärkeres Kapital trägt auch viermal mehr Zinsen u. s. w. Ungeachtet nun hier die Größen selbst verschiedener Art, oder ungleichartig sind, wie Waaren und Preise u. d. gl.: so können sie doch als gezählte, und insofern gleichartige Größen 2 gleiche Verhältniße, oder eine wahre geometrische Proportion bilden, wo die Größen von einerley Art am schicklichsten immer in einem Verhältniße zusammengestellt werden. Z. B. 3 Zentner Mehl kosten 9 Gulden, wieviel kosten 8 Zentner? Hier setze man

Ztn.		Ztn.		fl.		fl.
3	:	8	=	9	:	x.

Dadurch wird auch der Fragesatz entweder das 2te oder 1te Glied, wie vorhin bemerkt worden.

A. Einfache und gerade goldne Regel.

§. 157. Erstens. Berechnung der Waaren und ihrer Preise.

Beyspiel 1. Wendet man auf das nur so gegebene Beyspiel die goldne Regel an: so hat man $8 \cdot 9 = 72$, und $\frac{72}{3} = 24 = x$, d. i. 8 Zentner Mehl kosten 24 fl.

Anmerkung. Die Prüfung, ob die aufgefundene gezählte Größe die wahre sey, ist immer, wenn man statt x ihre Zahl in die Proportion bringt. Sind dann die Exponenten dieselben, oder ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der zwey mittleren: so ist die gefundene Zahl die richtige (§§. 135. 142.); was wir ein für allemal wollen bemerkt haben.

Oder man kann auch die Aufgabe umkehren; z. B. man hat mittels der Proportion den Preis für eine gegebene Quantität Waare gefunden: so sieht man nun die letztere als unbekannt an, und versucht, ob man zu dem berechneten Preise dieselbe Quantität Waare wieder auffinde.

Sollte man zweifeln, ob man die Größen richtig angesetzt habe: so bemerke man die Regel, daß hier das dritte Glied dem ersten, und das vierte dem zweyten entsprechen müsse.

Beyspiel 2. 100 Pfunde kosten 34 fl., was kosten $12\frac{1}{2}$ Pfund?

$$\begin{array}{cccc} \text{lb.} & \text{lb.} & \text{fl.} & \text{fl.} \\ 100 : & 12\frac{1}{2} = & 34 : & x. \end{array}$$

Nach §. 148. erhält man durch Division durch $12\frac{1}{2} = \frac{25}{2}$ die Proportion:

$$\begin{array}{cccc} \text{lb.} & \text{lb.} & \text{fl.} & \text{fl.} \\ 8 : & 1 = & 34 : & x. \end{array}$$

Also $x = \frac{34}{8} = 4\frac{1}{4}$ fl. $= 4$ fl. 15 kr. (§. 101. Anm. 1).

Beyspiele zur Uebung, wobey man sich dessen, was oben im Zusatze zu §. 148. von der Umwandlung des Verhältnisses, in welchem Brüche als Glieder vorkommen, gesagt worden ist. 1) $\frac{3}{4}$ lb. kosten $5\frac{4}{7}$ fl. wieviel lb. bekömmt man für $19\frac{2}{3}$ fl.? **Antwort:** $2\frac{101}{156}$ lb.

2) $2\frac{3}{4}$ Ellen Band kosten 45 kr., was kosten 17 Ellen? **Antw.** $278\frac{2}{11}$ kr. oder (nach der gleichfolgenden Aufgabe) $4\frac{19}{30}$ fl.

Anmerkung. Ohne sich der Regel detri zu bedienen, kann man mittels der Decimalrechnung leicht den Preis eines oder mehrerer Dinge der nämlichen Art finden, wenn man weiß, was 1000 oder 100 solcher Dinge kosten. Die ganze Arbeit besteht darin, daß man den Preis jeder der verschiedenen Einheiten, aus denen die gegebene Zahl, deren Preis man kennen will, besteht, insbesondere sucht, und diese partiellen Preise am Ende summirt. Der Preis jeder dieser verschiedenen Einheiten aber wird leicht gefunden, wenn man sie als 10tel, 100tel u. s. w. von 1000, von 100 u. s. w., wie es der Fall ist, betrachtet, und dann durch Versetzung des Komma den 10ten, 100sten . . . Theil des Preises von 1000 oder 100 nimmt.

Beyspiel. 1000 lb. irgend einer Waare kosten 4 fl., was kosten 12, 12 lb., d. i. 12 lb. und 12 Hundertel lb.?

Man setze:

Für 10 lb., welche 10tel von 1000 sind, den 100sten Theil hat man	0,04 von 4 fl.
Für 1 lb., welche 1000tel von 1000, oder ein 10tel von 10, den 1000sten Theil hat man	0,004 — —
Für 1 lb., nochmals das Nämliche hat man .	0,004 — —
Für 0,1 lb., 10tel von 1 lb., den 10ten Theil vom Preise für 1 lb. hat man . . .	0,0004 — —
Für 0,01 lb., 10tel von 0,1 lb., den 10ten Theil vom Preise für 0,1 lb. hat man .	0,00004 — —
Für 0,01 lb., nochmals das Nämliche, hat man	0,00004 — —
Also der Preis für 12, 12 lb.	0,04848,

d. i. ungefähr 0,05 fl., oder $\frac{1}{20}$ fl.

§. 158. Zweytens. Die einfache Resolvirungs- und Reduktionsrechnung; das Resolviren überhaupt besteht in dem Verwandeln einer benannten Zahl höherer Art oder Ordnung in eine gleiche Zahl niederer Art: z. B. fl. in kr., oder Tage in Stunden, Ztn. in lb., oder

lb. in Lothe u. d. gl. verwandeln. Das Reduziren ist das umgekehrte Verfahren, wodurch man nämlich überhaupt Zahlen niederer Art oder Ordnung auf gleiche Zahlen höherer Art bringt, z. B. Kreutzer auf Gulden, Lothe auf Pfunde und Zentner u. s. w.

Einfach heißen diese Rechnungen, in wieferne hiebey nur von Zahlen nächst-niederer, oder nächst-höherer Art oder Ordnung die Rede ist.

Beyspiel 1. Es seyen 20 fl. in kr. zu verwandeln; so hat man, wenn 1 fl. = 60 kr. ist, die Proportion:

fl.	fl.	kr.	kr.
1 :	20 =	60 :	x.

wo also x = 20 . 60 = 200 kr.

Anmerkung 1. So in allen übrigen Fällen, wo man eine Zahl höherer Art verwandeln soll in eine gleiche Zahl der nächstniedern Art. In diesen Resolvirungs-Fällen gilt die Regel: Man multiplizire die zu verwandelnde benannte Zahl durch diejenige Zahl der nächstniedern Art, welche Zahl gleich ist einer einzigen Einheit der nächsthöheren Art.

Soll man aber z. B. Rheinländische Fuße in Pariser Fuße, und umgekehrt, verwandeln: so muß man, weil hier nur die Rede ist von verschiedenen Arten von Fußen, nicht aber von einer höheren und nächstniedern Art, die Reduktionszahlen, wie man es nennt, wissen. So verhält sich z. B. 1 Rheinl. Fuß : 1 (alt.) Par. Fuß = 13913 : 14400, d. i. 13913 Par. Fuß = 14400 Rheinl. Fußen.

Dieser Reduktionszahlen muß man sich daher bedienen, wenn z. B. 30 Rheinl. Fuße in Pariser zu verwandeln wären. Man setze demnach

Rh F.	Rh. F.	P. F.	P. F.
14400 :	30 =	13913 :	x.

wo $x = 28\frac{1412}{1440}$ P. F.

Beyspiel 2. Es seyen 13448 Lothe in lb. zu verwandeln. Man setze, wenn 32 Loth = 1 lb.

$$32 : 13448 = 1 : x;$$

wo $x = \frac{13448}{32} = 420\frac{1}{4}$ lb.

Anmerkung 2. So in allen übrigen Fällen, wo eine benannte Zahl niederer Art in eine gleiche der nächsthöheren Art soll verwandelt werden. Die Regel der Reduktion ist kurz diese: Man dividire die gegebene benannte Zahl durch diejenige Zahl derselben niedern Art, welche gleich ist einer einzigen Einheit der höheren Art.

Anmerkung 3. Diese oder die vorige Regel (Anm. 1. Beysp. 1.) muß man anwenden, wenn benannte Zahlen von verschiedener Art als ein Glied in der Proportion vorkommen, um nur eine benannte Zahl derselben Art zu haben. Z. B. $\frac{1}{2}$ lb. 11 Loth kosten 7 fl. 21 kr., was kosten 3 lb.? Verwandelt man hier die lb. in Lothe, und addirt 11; die fl. in kr., und addirt 21: so hat man

	lb.	Loth		lb		fl.	kr.		fl.	kr.	
statt	$\frac{1}{2}$	11	:	3	=	7	21	:		x,	die Proportion:
		Lothe		Lothe			kr.			kr.	
		27	:	96	=		441	:		x.	
	oder	9	:	32	=		441	:		x.	(§. 148.)
	oder	1	:	49	=		32	:		x.	(§. 148. Zus.)

also $x = 49 \times 32 = 1568$ kr. = 26 fl. 8 kr.

§. 159. Drittens. Die einfache Rabat- oder Skontorechnung. Diese findet in dem Falle statt, wenn man früher bezahlt, als man es schuldig ist, und dann berechnet werden soll, wieviel man deßwegen von der Zahlungssumme wegziehen dürfe. Dieser Abzug heißt Rabat oder Skonto.

Beyspiel 1. A verkauft dem B ein Haus um 2000 fl., welche erst nach 2 Jahren zu zahlen sind. Am Ende des ersten Jahres verspricht aber A dem B 4 Procent (4 pro $\frac{0}{0}$) Nachlaß, wenn er ihn gleich bezahle. Wieviel darf B abziehen, oder welche Summe muß er noch bezahlen?

Die gewöhnliche Rechnungsart ist hiebey folgende: 100 fl. bringen 4 fl. Nachlaß, wieviel 2000 fl.? D. i. 100 : 2000 = 4 : x, also x = 80 fl., mithin die noch zu zahlende Summe = 1920. Oder man hätte, um die letztere Summe sogleich zu finden, so rechnen können: wenn 100 fl. nur 96 fl. sind, was sind 2000 fl.?

Kaufleute nennen diese Art, diese und ähnliche Aufgaben zu berechnen, die Rechnung in Hundert (d. i. an oder von 100, en dedans) zum Unterschiede von der Rechnungsart, welche, statt die Procente abzuziehen, wie wir vorher thaten, dieselben addirt, nach dem Satze: 104 fl. sind erst 100 fl., was sind 2000? Diese Rechnung nennen sie das Rechnen auf Hundert (en dehors). Man setzt: 104 : 2000 = 100 : x, wodurch die Zahlungssumme x = $1923\frac{8}{104}$ fl. gefunden wird, welche Summe die vorhin gefundene um $3\frac{8}{104}$ fl. übersteigt.

Es fragt sich also, welche dieser Rechnungsarten sowohl mathematisch richtiger, als auch der Billigkeit angemessener sey? Wir sagen: offenbar die Rechnung auf 100. Denn vermöge der ersten Art zu rechnen verlor A 80 fl. Skonto; nach dieser letzten Art verliert er nur 2000 — $1923\frac{8}{104}$ = $76\frac{96}{104}$ fl. Berechnet man nun, ob A, wenn er die statt 2000 empfangenen $1923\frac{8}{104}$ fl. sogleich auf Interesse zu 4 pro $\frac{0}{0}$ legte, wieder den erlittenen Abzug einbringen werden: so findet man vermöge der Proportion 100 : $1923\frac{8}{104}$ = 4 : x, daß dieses wirklich der Fall sey; keineswegs aber bringen die 1920 fl., zu 4 pro $\frac{0}{0}$ auf ein J. ausgelegt, den erlittenen Skonto von 80 fl. ein. Daß dessenungeachtet die Rechnung in 100 bey Kaufleuten üblich ist, läßt sich nur dadurch erklären, weil sie das baare Geld im Handel zu höheren Procenten nützen können.

Beyspiel 2. Ein Handelsmann A kauft für 2500 fl. Waare, nach einem Jahre zahlbar. Allein A wird durch irgend einen Zufall in den Stand gesetzt, sogleich zu zahlen. Da nun die Kaufleute einander 6 pro $\frac{0}{0}$ Abzug gestatten; wieviel wird A statt 2500 fl. zahlen?

Antwort: nach der ersten Rechnung in 100 zahlt A nur 2350, der Skonto ist 150 fl., nach der 2ten auf 100 zahlt er $2358\frac{26}{53}$, der Abzug = $141\frac{27}{53}$.

Die umgekehrten Aufgaben können zur Probe dienen. Z. B. wenn B $141\frac{27}{53}$ fl. Abzug leidet, indem der Skonto 6 von 100 ist, wie groß war 1) die von A wirklich gezahlte Summe? Man setze $6 : 141\frac{27}{53} = 100 : x$. 2) Zu diesem gefundenen x den Rabat hinzugethan, hat man die anfängliche Kaufsumme. Diese findet man auch, wenn man spricht: 100 fl. gleich Anfangs bezahlt gelten für 106, für wieviel gelten $2358\frac{26}{53}$ fl.? oder man setzt: $100 : 2358\frac{26}{53} = 106 : x$. Allein bey der Rechnung in 100 muß man schließen: wenn 94 fl., sogleich bezahlt, 100 fl. gelten, wieviel gelten die sogleich bezahlten 2350 fl.? Daher setzt man: $94 : 2350 = 100 : x$. 3) Auch kann man den Rabat für 100 suchen; z. B. wenn man 150 fl. (in 100 gerechnet) nachläßt, um 2500 baar bezahlt zu bekommen, wie groß ist der Nachlaß von 100. Man setze: $2500 : 100 = 150 : x$.

§. 160. Viertens. Die einfache Zins- oder Interessenrechnung.

Beyspiel 1. Wenn 100 fl. 5 fl. jährliches Interesses geben, wieviel geben 5468 fl.?

$$100 : 5468 = 5 : x,$$

woraus $x = 273\frac{2}{5}$ fl. gefunden wird.

Beyspiel 2. Wie stark muß das Kapital seyn, welches jährlich $273\frac{2}{5}$ fl. Interesse giebt, wenn es zu 5 Procent aussteht? $5 : 273\frac{2}{5} = 100 : x$.

Da man hieraus wieder $x = 5468$ fl. findet: so hat man dadurch zugleich die Probe über die vorige Berechnung.

§. 161. Fünftens. Kaufmännische Gewinn- und Verlustrechnung.

Beyspiel 1. Eine bestimmte Quantität Kaffee's wurde so eingekauft, daß jede 4 ℔ um 7 fl. kamen; nun muß man aber jede 3 ℔ um 5 fl. wieder verkaufen: wieviel beträgt der Gewinn oder Verlust auf 1 ℔?

Man schließe zuerst: wenn 3 ℔ 5 fl. kosten, was 4 ℔? und setze: $3 : 4 = 5 : x$; so hat man $x = \frac{20}{3}$ fl. für 4 ℔. Allein jede 4 ℔ kosteten 7, oder $\frac{21}{3}$ fl, mithin hat man an jede 4 ℔ $\frac{1}{3}$ fl. Verlust. Durch die Proportion:

$4 : 1 = \frac{1}{3} : x$, findet man, daß man demnach an 1 ℔ $\frac{1}{12}$ fl. oder 5 kr. verliere.

Beyspiel 2. Jede 4 Ellen Tuches wurden um 17 fl. gekauft, aber jede 5 Ellen wieder um 29 fl. verkauft, und hiedurch 186 fl. im Ganzen gewonnen: wieviel Ellen Tuches waren eingekauft?

Man schließe, wie vorhin, 5 Ellen kosten 29 fl., was 4 Ellen? Aus $5 : 4 = 29 : x$ findet man $x = \frac{116}{5}$ fl. Demnach wurden an jeden 4 Ellen $\frac{116}{5} - 17 = \frac{116}{5} - \frac{85}{5}$, d. i. $\frac{31}{5}$ fl. gewonnen.

Nun schließt man weiter: wenn 4 Ellen diesen Gewinn geben, wieviel Ellen werden den Gewinn von 186 fl. geben? Man findet aus

$\frac{31}{5} : 186 = 4 : x$, diese Ellenanzahl $x = 120$.

Beyspiel 3. Ein Kaufmann in Würzburg kauft jede 100 Wiener Ellen Zeuges um 750 fl., wie hoch muß er die Würzb. Elle verkaufen, um 8 Procent zu gewinnen?

Hier muß erst berechnet werden, wieviele Würzb. Ellen jene 100 Wiener Ellen machen. Die hieher gehörigen Reduktionszahlen sind: 345,42 pariser Linien = 1 Wien. Elle, und 260,8704 dieser Lin. = 1 Würzb. Elle. Es verhält sich also

die Würzb. Elle zur Wien. Elle, wie 260,8704 zu 345,42, oder 345,42 Würzb. El. machen erst 260,8704 Wien. Ellen, und in ganzen Zahlen 34542 Würzb. El = 26087 Wien. El. Um demnach zu finden, wieviel Würzb. Ellen jene 100 Wiener Ellen machen: setze man $26087 : 100 = 34542 : x$, woraus man $x = 132,4$ Würzb. Ellen findet.

Diese letzte Ellenanzahl kostet also 750 fl. Man will 8 Procent gewinnen. Nach §. 160. bringen diese 750 fl. zu 8 pro % 60 fl. Wenn nun diese 60 fl. sogleich zum Kauf-

preise geschlagen werden: so kostet jene Ellenanzahl 750 + 60, d. i. 810 fl. Man findet daher den Verkaufspreis einer Elle dadurch, daß man setzt:

132,4 Ellen : 1 El. = 810 fl. : x fl., woraus man x = 6 fl. 10 kr. beynahe, als Verkaufspreis einer Elle, findet.

Beyspiel 4. 20 Zentner Kaffee, gekauft um 1400 fl., werden in 6 Monat für 1800 fl. verkauft; wieviel Procent können auf diese Art in 1 Jahre gewonnen werden?

Da durch jene Summe in 6 Mon. 400 fl., also in 12 Mon. 800 fl. gewonnen werden, so setze man: 1400 fl. 100 fl. = 800 Gewinn : x Gewinn; wo x = 57 fl. Procent (beynahe) für 1 J. gefunden wird.

§. 162. Sechstens. Tararechnung.

Tara ist das Gewicht der Emballage einer Waare, diese Emballage mag nun in Fässern, Kisten, Beuteln, oder in anderen Umschlägen bestehen. Das Gewicht der Waare sammt der Emballage heißt sporco, brutto, (unlautere Waare), das Gewicht nach abgezogener Tara heißt netto (reine, lautere Waare).

Es giebt hiebey 2 Fälle: 1. wenn die Waare und die Emballage eigends gewogen werden kann; 2. wenn die Waare sammt Emballage gewogen und demnach sporco bezahlt werden muß.

Beyspiel zu Fall 1. Man kauft den Zentner Wismuth netto à 25 fl., empfängt brutto $15\frac{3}{4}$ Ztn., die Kisten wiegen 32 ℔. Wieviel muß man zahlen?

Antwort. $15\frac{3}{4}$ Ztn. = 1575 ℔, davon 32 ℔ abgezogen, bleiben 1543 ℔ netto zu bezahlen. Die Zahlungssumme findet man durch die Proportion:

100 ℔ : 1543 ℔ = 25 fl. : x fl., wo x = 385,75 fl. = 385 fl. 45 kr. gefunden wird.

In dem 2ten Falle giebt der Verkäufer entweder einige Pfunde zu auf den Zentner, welche Zugabe Tara auf den

Ztr. oder auf 100 heißt, oder er läßt einige Pfunde vom Zentner nach — Tara vom Ztr., oder in 100.

Beyspiel 1. Man bekömmt 6 Zentner Baumöhl, unlauter oder brutto gewogen, der Ztr. netto kostet $20\frac{3}{4}$ fl., die Tara in 100 ist 12 ℔, was muß man zahlen?

Weil hier 100 ℔ nur 88 ℔ netto, daher auch die 6 Ztr. $= 88.6 = 528$ ℔ netto sind: so findet man, wie vorher, durch die Proportion:

100 ℔ $: 528$ ℔ $= 20\frac{3}{4}$ fl. $: x$,

die Zahlungssumme $= 109\frac{224}{400}$ fl.

Beyspiel 2. Man erhält 10 Ztr. Wolle unlauter, oder mit den Säcken gewogen; die Tara auf 100 ist 10 ℔, was kostet diese Wolle netto, wenn das ℔ 15 kr. kostet?

Hier sind 110 ℔ brutto erst 100 ℔ netto. Demnach findet man durch die Proportion:

110 ℔ br. $: 1000$ ℔ br. $= 100$ ℔ net. $: x$,

daß jene 10 Ztr. erst $909\frac{1}{11}$ ℔ netto machen.

Wäre die Tara 10 ℔ in 100, so, daß demnach 100 ℔ br. erst 90 ℔ net., also die 1000 ℔ Wolle unlauter 900 ℔ lauter machten: so sieht man ein, daß man $9\frac{1}{11}$ ℔ weniger, als im vorigen Falle zu zahlen hätte. Man findet nämlich den Nettobetrag der Zahlungssumme durch die 2 Proportionen:

1 ℔ $: 909\frac{1}{11} = 15$ kr. $: x$ (Tara auf 100)

$1 \quad : 900 \quad = 15 \quad : x$ (Tara in 100),

oder der Nettobetrag x für den ersten Fall $= 13636\frac{4}{11}$ kr. $= 227$ fl. $16\frac{4}{11}$ kr., für den zweyten Fall ist $x = 225$ fl.

Es erhellt hieraus deutlich, warum die Käufer sich lieber die Tara in 100 oder vom Zentner bedingen, oder daß der Verkäufer bey der Tara auf 100 gewinne.

Beyspiel 3. Was ist der Nettobetrag einer Tonne Häringe von 6 Ztr., wenn die Tara $10\frac{1}{2}$ ℔ auf 100 ist, und der Ztr. lauter 30 fl. kostet?

Es ist, wie vorhin, $110\frac{1}{2}$ ℔ brutto $= 100$ ℔ netto. Also die 6 Ztr. oder 600 ℔ roh $= 542\frac{218}{221}$ ℔ lauter; daher der Nettobetrag der 6 Ztr. $= 162\frac{128}{221}$ fl.

Berechnet man wieder dieses Beyspiel mit der Tara in 100: so machen jene 6 Zentner nur 537 ℔ netto, kosten folglich nur 161,1 fl.

Anmerkung. Auch wird bey Waaren, welche entweder viel Unrath haben, oder welche durch den Transport leiden, dem Käufer ebenfalls ein Abzug gestattet. Diesen Abzug rücksichtlich des Fusti, wie man es zu nennen pflegt, berechnet man auf dieselbe einfache Art, wie die Tara.

Die umgekehrten Aufgaben dienen auch hier wieder als Uebung und Probe der Rechnung. Z. B. man erhält für 600 ℔ brutto $162\frac{198}{221}$ fl., indem man für 100 ℔ netto 30 fl. bedungen hat. Wie hoch ist die Tara auf 100 bewilligt worden?

Wäre keine Tara vorhanden: so hätte man 30.6 d. i. 180 fl. für die 6 Ztr. empfangen müssen; man erhielt demnach $180 - 162\frac{198}{221}$, oder $17\frac{23}{221}$ fl. wegen der Tara weniger. Wenn man aber auf 600 ℔ soviel weniger empfängt, wieviel weniger erhält man für 100 ℔? Man findet $2\frac{6768}{7935}$ fl. Indem man nun sucht, wieviele ℔ brutto man für die Summe erhalte, wenn man 600 ℔ br. für $162\frac{198}{221}$ fl. empfängt, oder giebt, so findet man $10\frac{1}{2}$ ℔ = der bedungenen Tara.

§. 163. **Siebentens. Berechnung der zur Vollendung einer gewissen Arbeit nöthigen Arbeiter und Zeit, wie des Tagelohns oder der nöthigen Kost für eine verzehrende Menge.**

Beyspiel 1. Drey pflügen in einem Tage 4 Morgen Feldes, wieviel pflügen, alles gleichgesetzt, 15 Arbeiter?

$3 : 15 = 4 : x$, wo $x = 20$.

2) Man braucht zur Aushebung eines Grabens, der 36 Fuß lang ist, 2 Tage, wieviel Tage brauchen dieselben Arbeiter, um einen Graben von 378 Fuß Länge auszuheben?

$36 : 378 = 2 : x$; wo $x = 21$ Tagen.

3) Eine Besatzung von 200 Mann soll durch 1400 Mann vermehrt werden; wieviel braucht die neue Besatzung Zentner Mehl, wenn die erste jährlich 167 Ztn. brauchte?

200 : 1600 = 167 : x; wo x = 1336 Ztn. M.

Beyspiele zur Uebung. I. Einen cubischen Behälter will man mit 1000 Eimer irgend einer flüßigen Materie füllen, wie tief muß der Behälter seyn, wenn 1 Eimer 14 Maße, und 35 Maße einen Cubikfuß des Behälters füllen?

Nach §. 158. Beysp. 1. Anm. findet man 1000 Eimer = 14000 Maße; 2) durch die Proportion: 35 M. : 14000 M. = 1 C. F : x C. F findet man 400 Cubikfuße; 3) aus dieser Zahl die dritte Wurzel ausgezogen, findet man die Tiefe des Behälters = 7,37 Fußen (§. 121.).

II. Wenn der Cubikfuß gegossenes Dukatengold wiegt 1191,2278 lb., und 67 Dukaten machen 1 Mark oder $\frac{1}{2}$ lb.: wie groß wird eine Seite des Würfels seyn, welcher aus 100000 Stück Dukaten gegossen wird?

Antwort. 0,855 . . Fuß.

Anmerkung. Bey der ersten Proportion, um die lb. zu finden, setze man die Division fort, daß man 746,268656 7163 lb. findet. Indem man diese Zahl durch 1191,2278 dividirt, findet man die Cubikf. = 0,626470090. Hieraus findet man nach §. 119. die Antwort.

B) Einfache und umgekehrte goldne Regel.

§. 164. Nach den im §. 136. gegebenen beyden Regeln läßt sich sogleich entscheiden, ob sich 2 Größen wie 2 andere gerade oder umgekehrt verhalten: man sieht nämlich leicht, ob das vierte zu findende Glied der Proportion größer oder kleiner, als das dritte, werden, ob folglich ein Verhältniß (man nimmt gewöhnlich das erste) umgekehrt werden müsse, wenn nicht auch das zweyte Glied größer oder kleiner ist, als das erste.

Beyspiel 1. Drey Arbeiter brauchen vier Tage, wieviel werden 12 Arbeiter brauchen? Setzte man hier, wie sonst,

Arb. Arb. T. T.
3 : 12 = 4 : x:

so sieht man, daß, weil 12 Arbeiter weniger Zeit als 3 brauchen, auch das 4te Glied x um soviel kleiner werden müsse, als das 3te, um wieviel kleiner das 2te ist, als das erste. Allein, was man hier nach der Regel ausspricht, findet sich nicht im Ansatze, indem das 2te Glied 12 größer ist, als das erste 3; ein Zeichen, daß, um eine wahre Proportion zu haben, so gesetzt werden müsse:

$12 : 3 = 4 : x$, wo $x = 1$ Tag.

Anmerkung. Die Fragegröße wird also hier das erste Glied; sollte sie auch hier das zweyte werden: so müßte man den Zahlen 3, 12 die Einheit überschreiben, und so ein Bruchverhältniß darstellen; nämlich $\frac{1}{3} : \frac{1}{12}$ ist offenbar gleich 12 : 3. Denn bringt man die Brüche auf einerley Nenner und läßt den gemeinschaftlichen Nenner weg (§. 148. Zusatz); so hat man wieder das Verhältniß 12:3.

Beyspiel 2. Wieviel Arbeiter sind für 10 Tage nöthig, wenn 16 Arbeiter 45 Tage brauchen?

Hier verhält sich 10 T. : 45 T. = 16 Arb. x Arb., wo x = 72 Arb.

2. Die Berechnung der Länge der Zeuge von verschiedener Breite, die zu einerley Absicht gebraucht werden.

Beyspiel 1. Man braucht zu einem Kleide 4 Ellen $\frac{11}{4}$ breites Tuch, wieviel hat man $\frac{3}{4}$ breites Unterfutter dazu nöthig?

Das erste Verhältniß $\frac{11}{4} : \frac{3}{4}$ umgekehrt hat man: $\frac{3}{4} : \frac{11}{4}$ oder $3 : 11 = 4 : x$ (§. 148. Zusatz); wo $x = 14\frac{2}{3}$ Ellen gefunden wird.

3. Die Berechnung der Quantität Menschen, welche mit derselben Quantität Lebensmitteln verschiedene Zeiten hindurch unterhalten werden kann.

Beyspiel 1. 700 Mann haben auf 5 Monate Proviant: wieviel Mann müssen abgehen, wenn man mit demselben Proviant 7 Monate auskommen muß? Man sucht hier zuerst, wieviel Mann 7 Monate damit erhalten werden könnten.

Das erste Verhältniß 5 : 7 umgekehrt, hat man: 7 Mon. : 5 Mon. = 700 M. : x M. wo x = 500 Mann; es müssen folglich 200 Mann abgehen.

Beyspiel 2. Wenn 500 Mann 7 Mon. von demselben Proviant leben können, wieviel Monat werden 700 M. davon leben?

$\frac{1}{500} : \frac{1}{700} = 7 : x$, wo $x = \frac{1}{100} \times \frac{500}{1} = 5$ Mon.

4. **Die Berechnung, in wieviel Zeit ein größeres Kapital eben soviel Zinsen trägt, als ein geringeres, das schon eine Zeitlang steht; und umgekehrt,** die Berechnung des Kapitals, wenn die verschiedenen Zeiten gegeben sind.

Beyspiel 1. Ich habe ein Kapital von 500 fl. vor 4 Jahren aufgenommen, und gegenwärtig 4500 fl. zu gleichen Prozenten auf Kapital gelegt: wie lange muß dieses stehen, bis die Interessen gleich werden?

4500 fl. : 500 fl. = 4 J. : x J.; wo $x = \frac{2000}{4500} = \frac{4}{9}$ Jahr $= 5\frac{1}{3}$ Mon. (§. 101. Anm. 1).

Beyspiel 2. Wenn 500 fl. in 4 Jahren gewisse Interesse tragen, wie stark muß das Kapital seyn, welches, auf gleiche Prozente ausgelegt, in $5\frac{1}{3}$ Mon. dieselben Interessen tragen soll?

$5\frac{1}{3}$ Mon. : 48 Mon (= 4 J.) = 500 fl. : x fl.; woraus $x = (48 \times 500) : \frac{16}{3} = \frac{24000 \cdot 3}{16} = \frac{72000}{16} = 4500$ fl. gefunden wird.

5. **Die Termin- oder Zielrechnung nach einfachen Zinsen.** Diese ist die Berechnung, wenn eine gewisse Summe Geldes, welche nur theilweise in festgesetzten Terminen oder Zielen zahlbar ist, auf einmal, ohne Schaden des Zählers und Empfängers gezahlt werden könne.

Beyspiel 1. A verkauft an B ein Gut um 5000 fl.; von dieser Summe sollen 2000 fl. in 2, 1400 in 6, 1600 in 12 Monaten gezahlt werden, und zwar jede Zielsumme ohne Darauflegung des Zinses. Wann kann B ohne Schaden für sich und für A die ganze Summe auf einmal erlegen?

Man sieht leicht, daß die Lösung dieser Aufgabe nicht wesentlich von der Berechnungsweise unter 4), oder von der Beantwortung der Frage verschieden ist: in wieviel Zeit wird das Kapital à 5000 fl. dieselben Zinsen tragen, als das kleinere Kapital à 200 fl. in 2, mit dem Kapitale von 1400 fl. in 6, mit dem Kapitale von 1600 fl. in 12 Monaten einbringt?

Man wird also nach dem 1sten Beyspiele unter 4) so setzen:

$$5000 : \left\{\begin{array}{l} \quad 2000 = 2 \\ + 1400 = 6 \\ + 1600 = 12 \end{array}\right\} : x.$$

Hieraus ergiebt sich die Regel für unseren Rechnungsfall: Man multiplizire jede einzelne Zielsumme mit ihrer bedungenen gleichnamigen Zeit; addire diese Produkte, und dividire diese gefundene Summe durch die ganze zu zahlende Summe.

In unserem Beyspiele ist $x = \frac{2000.2 + 1400.6 + 1600.12}{5000}$

oder, da der Zähler dieses Bruches $= \left.\begin{array}{r} 4000 \\ + 8400 \\ + 19200 \end{array}\right\} = 31600$

ist, so ist $x = \frac{31600}{5000} = \frac{316}{50} = 6\frac{16}{50} = 6\frac{8}{25}$ d. i. nach soviel Monaten können 5000 fl. ohne Schaden beyder Interessenten auf einmal gezahlt werden.

Man kann sich, wie aus dem ersten Ansatze deutlich erhellt, die Rechnung erleichtern, wenn man die einzelnen Terminsummen durch ein gemeinschaftlich größtes Maß ab-

kürzt, diese so gefundenen Zahlen, wie vorhin, multiplizirt, aber die Produktensumme dann durch die Summe jener abgekürzten Zahlen dividirt. In unserem Beysp. ist 200 dieses gemeinschaftlich größte Maß, wodurch man die kleineren Zahlen 10, 7, 8, und die kleineren Produkte 20, 42, 96 erhält. Die Summe derselben = 158, durch die Summe 10 + 7 + 8 = 25 dividirt, bekömmt man, wie oben, denselben Quotienten $6\frac{8}{25}$.

Beyspiel 2. Für den Fall, wenn die Terminen nicht eingehalten worden sind. Es sey die Summe von 2000 so zahlbar, daß 500 fl. nach 1 Jahre, 700 nach $1\frac{1}{2}$, und der Rest 800 fl. nach 3 J. erlegt sind. Der Zähler hat aber den ersten Termin nicht eingehalten, sondern gleich nach dem 1sten Vierteljahre die Summe von 600 fl. bezahlt. Wann kann nun das übrige Geld, nämlich 1400 fl., auf einmal gezahlt werden?

In diesem Falle ist

$$x = \frac{500 \cdot 1 + 700 \frac{3}{2} + 800 - 600 \frac{1}{4}}{1400} = \frac{5 + 10\frac{1}{2} + 24 - 1\frac{1}{2}}{14}$$

$= \frac{38}{14} = 2\frac{5}{7}$ Jahre.

Beyspiel 3. Für den Fall, wenn die Zielsummen zugleich verzinset werden müssen.

A verkauft an B ein Gut um 6000 fl.; 2000 sind sogleich zu erlegen, der Rest ist nach Terminen sammt Zins zu zahlen, und zwar 1200 nach 1 Jahre mit 3 Prozent; 1300 nach 2 J. mit 4; 1500 nach 4 J. mit 5 Prozent. A wünscht nun die Summe auf einmal zu haben; wann kann B dieselbe ohne Schaden zahlen?

Hier fragt sich, wann werden 4000 fl. gleich viel Zins abwerfen, als die einzelnen Terminsummen, vorausgesetzt, daß der landesübliche Zins 5 Prozent sey?

In diesem Falle nun verfährt man demnach ganz so, wie oben, nur daß man noch die einzelnen Terminen, wie die ganze Summe, mit den entsprechenden Prozentzahlen multiplizirt.

Es ist nämlich

$x = \frac{1200.1.3 + 1300.2.4 + 1500.4.5}{4000 . 5}$. Wenn man durch 400 abkürzt: so hat man kürzer

$x = \frac{9 + 26 + 75}{50} = \frac{110}{50} = 2\frac{1}{5}$ Jahr, d. i. in soviel Zeit bringen 4000 fl. dem A soviel Zins, als die einzelnen Terminsummen in 4 J.; demnach kann B an A die ganze Summe erst nach $4 - 2\frac{1}{5}$ J., d. i. nach $1\frac{4}{5}$ J. auf einmal zahlen.

Anmerkung. Die sogenannte wälsche, oder italienische Praktik lehrt blos einige Erleichterungen im Rechnen bey diesen Ausgaben über die einfache goldene Regel, indem sie die doppelte Operation, Multiplikation und Division, so wie das Multipliziren und Dividiren mit Brüchen möglichst vermeiden lehrt.

1) Wenn 30 Metzen Getreid 48 fl. 30 kr. kosten, was kostet eine Metze? Nach der wälschen Praktik setzt man so:

$$\begin{array}{llll} 30 : 1 & = 48 \text{ fl.} & 30 \text{ kr.} & : x \\ 5 & = 8 & 5 & \\ 1 & = 1 & 37 & \end{array}$$

Also $x = 1$ fl. 37 kr. Statt nämlich aus dem ersten Ansatze, wie gewöhnlich, $x = \frac{48}{30}$ fl. $+ \frac{30}{30}$ kr. $= 1\frac{8}{30}$ fl. $+ 1$ kr. $= 1\frac{2}{5}$ fl. $+ 1$ kr. $= 1$ fl. $+ 37$ kr. zu suchen, lehrt diese Praktik durch die Faktoren von 30, nämlich 6 und 5, gehörig zu dividiren, und so die unbekannte Zahl zu finden.

Zu demselben Zwecke lehrt sie auch die Benennungen der mittleren Glieder verwechseln. Z. B. wenn 1 Elle Band 13 kr. kostet, was kosten 60 Ellen? Statt nun hier $x = 13.60 = 780$ kr. $= 13$ fl. nach dem Ansatze zu finden und zu suchen; spricht man: wenn 1 Elle Band 60 kr. kostet, was kosten 13 Ellen? wodurch man sogleich $x = 13$ fl. findet.

2) Gemeine ächte Brüche, deren Zähler nicht $= 1$ sind, lehrt die wälsche Praktik entweder in die Einheit weniger einem Bruche (z. B. $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$) oder in lauter

Stammbrüche auflösen. Allein die unächten Brüche lehrt sie in gemischte Zahlen auflösen, und dann jede Zahl einzeln multiplizieren.

Beyspiel 1. Wenn 1 Elle Tuch 4 fl. kostet, was kosten $4\frac{3}{8}$ Ellen? Man setzt:

$1 : \frac{43}{8} = 4 : x$, oder $1 : 5 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 4 : x$, also $x = 20 + 1 + \frac{1}{2} = 21$ fl. 30 kr.

Hätte es statt $4\frac{3}{8}$ geheissen $\frac{77}{16}$: so hätte man nach dieser Praktik so resolviren müssen: $4 + \frac{13}{16} = 4\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$, indem man für $\frac{13}{16}$ die Zahl 8, und für den Rest $\frac{5}{16}$ die Zahl 4 als gemeinschaftliches Maß braucht.

Beyspiel 2. Wenn 1 Elle 12 fl. 18 kr. kostet, was kosten $\frac{8}{9}$ Ellen? Da $\frac{8}{9} = 1 - \frac{1}{9}$: so hat man

für 1 Elle 12 fl. 18 kr.
für $\frac{1}{9}$ — 1 fl. 22 kr. } also $x = 10$ fl. 56 kr.

3) Die wälsche Praktik lehrt die Zahlen niederer Art oder Ordnung in Brüchen höherer Ordnung, wie wir im §. 71. anzeigten, und umgekehrt verwandeln, so wie es der Rechnungsvortheil erheischt.

Beyspiel. 1 ℔ kostet 3 fl. 15 kr., was 1 Zentner? Man erhält aus : 1 ℔ : 100 ℔ = $3\frac{1}{4}$ fl. : x, die gesuchte Zahl $x = 300 + 25 = 325$ fl.

C) Zusammengesetzte goldne Regel.

§. 165. Diese Regel (§. 156.) findet immer bey denjenigen Aufgaben statt, wo die Fragegröße mit der ihr gleichartigen durch mehrere Bestimmungen ausgedrückt wird; wenn z. B. die Wochen-, Tage- und Stundenanzahl der Arbeiter bestimmt angegeben, und dann nach der Größe der Arbeit im Verhältniß zur bestimmten andern Größe der Arbeit gefragt wird.

Dergleichen Aufgaben zu lösen, hat man verschiedene Methoden erfunden. Wir wollen erst diejenige Auflösungsart anführen, welche blos in einem mehrmaligen Anwenden derselben einfachen geraden oder umgekehrten Regel detri besteht.

Zur zusammengesetzten goldnen Regel gehört nämlich:

1. Die Berechnung der Verrichtungen der Arbeiter, in wiefern ihre Kraft, durch genaue Angabe der Zeit, innerhalb welcher sie wirken, genau bestimmt wird, und umgekehrt, wie auch der zu gewissen Verrichtungen nöthigen Zeit selbst.

Beyspiel. Wenn 20 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiten, in 4 Wochen einen Damm von 300 Fuß Länge fertig bringen: in wieviel Wochen werden 16 Arbeiter, die täglich 12 Stunden an der Arbeit sind, mit einem Damme von 400 Fuß fertig?

Man nehme aus dem ersten Satze, der die Bedingung der Frage aussagt, eine gezählte Größe z. B. 20 Arbeiter, und setze sie mit einer bekannten gleichartigen Größe aus dem Satze, der die Frage enthält, hier 16 Arbeiter in Verhältniß; endlich nehme man noch die mit der gesuchten Größe ($= x$), hier Wochen, die bekannte gleichartige Größe zusammen, und stelle die Proportion an, ohne sich um die übrigen Stücke weiter zu kümmern:

$$16 \text{ A.} : 20 \text{ A.} = 4 \text{ W.} : z \text{ W.}$$ (§. 164. Beyspiel 1.).

Also $z = \frac{20 \cdot 4}{16} = 5.$

Da es hier aber auch auf die Größe der Arbeit mit ankömmt, wie groß x müsse erhalten werden: so setze man ferner

$$300 \text{ F.} : 400 \text{ F.} = z : y; \text{ also } y = \frac{400 \cdot z}{300}.$$

Da sich endlich die gesuchte Wochenzahl vermindert, wenn täglich mehr Stunden gearbeitet werden: so wird umgekehrt gesetzt:

$$12 \text{ St.} : 8 \text{ St.} = y : x; \text{ also } x = \frac{8 \cdot y}{12}.$$

Setzt man endlich 1) den Werth für y in dem für x gefundenen Werth: so ist $x = \frac{8 \cdot 400 \cdot z}{12 \cdot 300}$; 2) eben so hier

den Werth für z: so ist $x = \frac{8 \cdot 400 \cdot 20 \cdot 4}{12 \cdot 300 \cdot 16} = 4\frac{4}{9}$ W. $= 4$ W. 3 T. $2\frac{2}{3}$ St.

§. 166. Zweyte Verfahrungsart, dergleichen Aufgaben zu lösen.

Wir fanden vorhin $x = \frac{8 \cdot 400 \cdot 20 \cdot 4}{12 \cdot 300 \cdot 16}$. Reflektirt man hier 1) über den Zähler dieses Bruches, durch welchen der Werth der gesuchten Größe x ausgedrückt ist: so sieht man, daß in ihm aus dem zweyten Satze, der die Frage enthält, blos die einzige Größe 400 F. vorkömmt; eine Größe, durch deren Verdoppelung, Verdreyfachung u. s. f. auch x oder die Wochenanzahl doppelt, dreyfach u. s. w. größer werden müßte, wenn man alle übrigen Stücke gleichsetzt. -- Reflektiren wir 2) auf die Faktoren des Nenners: so finden wir darin alle genannten Größen aus dem Fragesatze, durch deren Verdoppelung u. s. w. auch die gesuchte Größe oder die Wochenanzahl, alles Uebrige gleichgesetzt, um das doppelte u. s. w. vermindert werden müßte. Dieß sind die Zahlen 12, 16. Nähme man nämlich 32 Arb. z. B. an, die 18 Stunden des Tages arbeiteten: so würde, wie man leicht sieht, in eben dem Verhältnisse die Wochenanzahl gemindert. -- 3) In Betreff der übrigen bekannten Größen aus dem ersten Satze, der die Bedingung enthält, bemerken wir, a) daß die mit der gesuchten Größe gleichartige nämlich 4 W. im Zähler vorkömmt; b) daß aber die übrigen Zahlen so vertheilt sind, daß keine gleichnamige oder gleichartige Größe aus diesem Satze zu den in 1) und 2) schon im Zähler und Nenner gesetzten Größen auf dieselbe Seite des Striches zu stehen kömmt.

Diesen Bemerkungen gemäß hätten wir unsere Aufgabe mit einemmale so lösen können:

Nach 1) hätten wir gesetzt x W. $= \frac{400 \text{ F.}}{\dots}$

Nach 2) -- -- -- x W. $= \frac{400 \text{ F.}}{12 \cdot 16}$

Nach 3) -- -- -- x W $= \frac{8 \cdot 400 \cdot 20 \cdot 4}{12 \cdot 300 \cdot 16}$,

Anmerkung. Verwandelt man mit Rees diesen horizontalen (Divisions-) Strich in einen senkrechten oder vertikalen, und setzt mit ihm die Zahlen des Zählers rechter Hand, die Zahlen des Nenners mit der gesuchten Größe an der Spitze linker Hand dieses Striches: so verfährt man bey dieser Auflösung nach der so berühmten Reesischen Regel. Die ganze Regel deutlich ausgedrückt heißt so:

Man nimmt den Fragesatz für sich. Die durch x ausgedrückte Fragezahl (d. i. die gesuchte Zahl) setzt man linker Hand eines Vertikalstriches. Alsdann erwägt man bey jeder Größe in dem Fragesatze besonders, ob ihre Verdoppelung, Verdreyfachung u. s. w., alles Uebrige gleichgesetzt, machen würde, daß die Fragezahl doppelt, dreyfach u. s. w. größer od. um die Hälfte, den 3ten Theil u. s. w. kleiner werden müßte. Ist jenes, so setzt man sie der Fragezahl gegenüber rechter Hand des Striches; ist dieses, so schreibt man sie unter der Fragezahl linker Hand des Striches. Darauf ordnet man die Zahlen des bekannten (ersten, die Bedingung enthaltenden) Satzes nach ihrem Namen so, daß nur nicht einerley Namen auf derselben Seite des Striches zu stehen kommen. Nachdem solchergestalt der Ansatz gemacht ist: so werden die Zahlen beyder Reihen gegeneinander aufgehoben (wie die Faktoren im Zähler und Nenner des Bruches). Wenn sich nichts mehr aufheben läßt, wird das Produkt der Zahlen in der Columne rechter Hand durch das Produkt aus den Zahlen linker Hand dividirt, der Quotient ist die gesuchte Zahl.

Weil die Zahlen rechter Hand blos in einander multiplizirt werden: so sagt man, sie stehen in der Multiplikationscolumne, und weil das Produkt aus den auf der

linken Hand stehenden Zahlen der endliche Divisor wird: so stehen sie in der Divisionscolumne.

Sollten Brüche unter den Zahlen vorkommen, so werden sie dadurch weggeschafft, daß man den Zähler an seinem Orte läßt, den Nenner auf die gegenüber stehende Seite schreibt, was aus der Multiplikation und Division mit Brüchen klar ist.

Nach dieser Reesischen Regel würde daher unser Beyspiel so berechnet:

Div. Col.	Mult. Col.						
x W.	4 W.	und	x W.	4	und	x	
300 F.	20 Arb.		3 F.	5. 4		3	5
16 A.	8 St.		4. 4	8		3	8
12 St.	400 F.		3 4	4			

Also $x = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$ W., wie oben.

Zur Erklärung diene noch folgendes Beyspiel:

Wenn die Metze Korn $1\frac{1}{2}$ fl. kostet, so wiegt ein 24 kr. Brod 7 lb. 12 Loth; wie viel muß ein 30 kr. Brod wiegen, wenn die Metze $2\frac{1}{4}$ fl. kostet?

Da das Brod bey einerley Preis um so weniger wiegt, je mehr die Metze Korn kostet, und bey einerley Kornpreis um so mehr wiegen muß, je mehr für es bezahlt wird: so steht dieses Beyspiel nach der Reesischen Regel so:

x lb.	7 lb. 12 L.	und	x Loth	236 L.
$2\frac{1}{4}$ fl.	30 kr.		135 kr.	30 kr.
24 kr.	$1\frac{1}{2}$ fl.		24 kr.	90 kr.

und	x L.	4. 59
	3. 9. 5.	5. 6
	4. 6.	2. 9. 5
	3	590,

indem man die Faktoren 4, 5, 6, 9 in beyden Columnen wegläßt:

also $x = 196\frac{2}{3}$ Lothe $= 6$ lb. $4\frac{2}{3}$ L.

§. 167. Dritte Auflösungsart der Aufgaben, wie sie in den 2 vorherstehenden §§. vorkommen.

a) Bringt man die Arbeiter unter den Begriff von Kraft oder Ursache, und ihre Verrichtungen unter den Begriff von Wirkung: so ist vorerst offenbar, daß eine größere Kraft, auch eine größere Wirkung hervorbringt, daß man folglich, wenn K die größere Kraft, k die kleinere, W die größere, und w die kleinere Wirkung bezeichnet, setzen kann:

$$K : k = W : w.$$

b) Es fragt sich nun, wodurch wird eine Kraft größer, so, daß auch die Wirkung verhältnißmäßig wachsen muß? Denkt man sich die eine Kraft noch einmal so lange wirken, als die andere: so muß nothwendig auch ihre Wirkung die doppelte von der der kleineren oder einfachen Kraft seyn. Zur Größebestimmung der Kraft gehört also die Zeitbestimmung überhaupt. Es fragt sich aber: sollen wir die gegebene Zeitbestimmung zur Kraft blos addiren, oder sollen wir diese mit der Zahl, wodurch die Zeit bestimmt angegeben wird, multipliziren? Man setze: 4 Arbeiter arbeiten 3 Tage, und 4 Arbeiter einen Tag: so ist es offenbar eben so viel, als wenn 4. 3 = 12 Arbeiter, wie diese 4, auch nur einen Tag arbeiteten, und die Wirkung jener Arbeiter ist offenbar dreymal größer als die Wirkung der 4 Arbeiter; d. h. man muß die Kraft durch die Zahl, welche die Zeit, innerhalb der die Kraft wirkt, bestimmt, wirklich multipliziren. Durch diese Multiplikation verliert sich die Zeitbestimmung, und man erhält blos eine Krafterhöhung.

Nennt man also die größere Zeitbestimmung Z und die kleinere z; so kann man setzen:

$$K . Z . : k . z = W : w.$$

c) Setzt man ferner 4 Arbeiter sollen 3 Tage und jeden Tag 6 Stunden arbeiten: so ist wieder offenbar, daß diese Arbeiter 18mal mehr arbeiten, als 4 Arbeiter die nur 1 Tag, und des Tages nur 1 Stunde arbeiten. Es ist daher eben so viel, als stellte man mit diesen letzten Arbeitern 18mal mehr Arbeiter oder 3. 6. 4 = 18. 4 = 72 Arbeiter in ein Verhältniß.

Nennt man also die größere Anzahl Stunden, als die größere Zwischenzeit Z', und die kleinere Zwischenzeit z': so hat man:

$$K \cdot Z \cdot Z' : k \cdot z \cdot z' = W : w.$$

d) Nimmt man endlich auf den Widerstand Rücksicht, der eine Kraft im Wirken hindert: so sieht man ein, daß diejenige Kraft doppelt, dreyfach u. s. w. weniger wirke, welche einen doppelt dreyfach größeren Widerstand leidet.

Da nun in den Aufgaben über die goldne Regel immer der größere Widerstand zur übrigens größeren Kraft gesetzt, und die übrigens kleinere Kraft mit dem kleineren Widerstande oder Hindernisse angegeben wird, wodurch diese Kraft in dem Verhältnisse ihres kleineren erlittenen Widerstandes zum größern wieder wächst: so darf man nur, um dieses Wachsen der sonst kleinern Kraft zu erhalten, die Zahlen, wodurch die verhältnißmäßige Größe der Widerstände ausgedrückt wird, umtauschen, d. i. die größere Zahl als Faktor der sonst kleineren, und die kleinere Zahl als Faktor der sonst größeren Kraft setzen.

e) Es erhellt übrigens von selbst, daß, wenn noch eine Zwischenzeit z. B. nebst Wochen und Tagen auch die Stunden, gegeben ist, dieselbe Proportion gültig ist, wenn man ihr, wegen der zweyten Zwischenzeit, z. B. Z'' als Faktor beyfügt. Man hätte nämlich:

$$K \cdot Z \cdot Z' \cdot Z'' : k \cdot z \cdot z' \cdot z'' = W : w.$$

Anwendung. Wir haben an dieser Proportion eine Norm oder Formel, die uns 1) des Ansetzens mehrerer Verhältnisse überhebt, welche am Ende zusammengesetzt werden müßten, um so eine einzige Proportion zu erhalten, wie sie jene Formel ausdrückt.

2) In allen Fällen, wo man sich der zusammengesetzten goldenen Regel bedienen muß, um eine Aufgabe, welche auf das Verhältniß zwischen Kraft und Wirkung, wenn auch

diese Ausdrücke nicht vorkommen, deutet, kann man diese Formel anwenden. Denn wir haben uns zwar der Zeitbestimmung überhaupt bedient, um diese Formel aufzustellen. Allein ich bemerkte schon oben, daß durch die Multiplikation diese Zeitbestimmung verschwindet, und nichts bleibt, als eine reine Krafterhöhung. Sind daher andere Bestimmungen, als die der Zeit gegeben: so verschwinden auch jene, an die Stelle von diesen gesetzt, und lassen eben auch eine blose Krafterhöhung.

Man kann daher unter Z, Ź, z, ź jede Bestimmung verstehen, wodurch die Kraft und jede Wirkung verhältnißmäßig erhöht wird. So ist z. B. der Preis des Brodes bey einerley Gewicht doppelt, dreyfach u. s. f. größer, wenn der Kornpreis doppelt, dreyfach u. s. f. und eben so, wenn die lb., welche ein Brod wiegt, bey einerley Kornpreis doppelt, dreyfach u. s. w. wachsen. Man kann also die Anzahl lb., erhöht durch die Multiplikation der Zahl, welche die gegebenen Preisbestimmungen des Getreides ausdrückt, als Kraft oder Ursache von dem größeren oder geringeren Preise des Brodes betrachten, folglich auch derley Aufgaben nach unserer Formel lösen.

3) Man kann eine jede Größe, die durch einen der Buchstaben bezeichnet, und in der Angabe unbekannt gelassen ist, finden, indem man an die Stelle jenes Buchstabens x setzet.

Darin eben besteht der Hauptvortheil dieser Formel, daß man, sobald man erwogen hat, wohin x gesetzt werden müsse, ob z. B. unter W oder w; oder Z, oder z, die übrigen Zahlen nur so, wie sie nach der Angabe zusammengehören, unter die Buchstaben der Formel dürfen gesetzt werden; ohne sich darum zu kümmern, ob in der Angabe ein umgekehrtes Verhältniß vorkomme oder nicht. Bey diesem Ansetzen darf man übrigens nur die in der Anmerkung zum §. 156. gegebene Regel beobachten. Ob aber x größer oder kleiner werden müsse, beurtheilt man leicht. Wir werden

die Art, dieß zu beurtheilen, an den folgenden Beyspielen deutlich machen.

Anmerkung. Diese Formel hat also vor der Regel, wie sie Rees vortrug, welcher, wie wir hier thun, die Begriffe von Ursache und Wirkung, die wir oben bey der Aufstellung jener Regel vermieden haben, einmischte, doch noch den Vortheil, daß man bey ihrer Anwendung nicht bey jedem Ansatze darum bekümmert seyn muß, ob nicht ein umgekehrtes Verhältniß mitunterlaufe, was für Anfänger zu beurtheilen oft sehr schwer wird.

Erläuterung des Gebrauches unserer Formel durch Beyspiele.

Man nehme 1) das Beyspiel des §. 162. Multiplizirt man 16 (Arb.) mit 12 (die Zahl der Stunden) und eben so 20 (Arb.) mit 8; so erhält man 192 und 160. Setzt man nun die Wochenanzahl für beyde gleich, so sieht man, daß 192 Arbeiter in derselben Zeit nicht 100 Fuß mehr fertig bringen können, als die 160 Arbeiter, daß folglich jene eine größere Wochenanzahl bedürfen. Man setze daher die Zahlen folgendermaßen:

$$\mathfrak{K} . \mathfrak{Z} . \mathfrak{Z}' : \mathfrak{k} . \mathfrak{z} . \mathfrak{z}' = \mathfrak{W} : \mathfrak{w}.$$
$$16 . x . 12 : 20 . 4 . 8 = 400 : 300.$$

Nach §. 142. ist nun $16 . 12 . 300 . x = 20 . 4 . 8 . 400$ und daraus wird $x = \frac{20 . 4 . 8 . 400}{16 . 12 . 300}$. (man sehe den Beweis im §. 145.) gerade so wie in den §§. 161. 162. gefunden.

2. Beyspiel. Es sey dieses das im §. 163. zuletzt angegebene Beyspiel. Daß und wie man diese Art von Aufgaben mittels unserer Formel lösen könne, haben wir vorhin unter 2) schon dargethan.

Da nun das Brod im Fragesatze 6 kr. mehr kostet, als das erstere,

und $\frac{24}{4} = 6$ d. i. 6 der 4te Theil von dem Preise des Brodes ist;

aber $\frac{90}{2} = 45$ kr. d. i. das, was die Metze Korn im Fragesatze mehr kostet (nämlich 135 kr. — 90 kr. = 45),

der zweyte also ein größerer Theil vom Kornpreise ist: so sieht man, daß man in Ansehung dessen, daß 6 kr. mehr gezahlt werden, nicht auch ein Brod von 7 lb. 12 Loth fodern könne, oder daß das gesuchte Gewicht kleiner seyn müsse. Man setzt demnach folgendermaßen:

$$\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{Z} : \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{z} = \mathfrak{W} : \mathfrak{w}$$

$$236 \text{ Loth} \cdot 90 : x \cdot 135 \text{ kr} = 24 : 30$$

Nach §. 142. ist $236 \cdot 90 \cdot 30 = 135 \cdot 24 \cdot x$ also, wie vorhin,

$x = \frac{236 \cdot 90 \cdot 30}{135 \cdot 24}$ Loth, gerade so, wie oben.

Will man auch hier weniger Faktoren haben: so verfährt man, ehe man x sucht, nach §. 148.

3. Beyspiel. Wenn 25 Menschen, welche 8 Tage und jeden Tag 9 Stunden schreiben, 36 Buch Papier verschreiben: in wie viel Tagen werden 15 Menschen, wenn sie täglich 8 Stunden schreiben, $28\frac{4}{5}$ Buch Papier verbrauchen?

In dieser Aufgabe ist es sogleich offenbar, daß die letztern eine größere Tageanzahl brauchen werden, als die erstern. Man setze also:

$$\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Z}' : \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{z} \cdot \mathfrak{z}' = \mathfrak{W} : \mathfrak{w} :$$

$$15 \cdot x \cdot 8 : 25 \cdot 8 \cdot 9 = 28\tfrac{4}{5} : 36 .$$

$$\text{oder } 3 \cdot x : 5 \cdot 9 = \tfrac{144}{5} : 36 .$$

$$\text{oder } x : 5 \cdot 3 = \tfrac{4}{5} : 1$$

Also $x = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{5} = 12$ Tagen.

4. Beyspiel. Wenn 8 Menschen in 6 Tagen, indem sie jeden Tag 12 Stunden arbeiten, 240 Ellen $1\frac{1}{4}$ breites Tuch verfertigen: wie viel Ellen $\frac{3}{4}$ breiten Zeug werden 5 Weber machen, wenn sie 4 Tage und täglich 14 Stunden arbeiten?

Multiplizirt man 8 mit 6 und 12, und 5 mit 4 und 14; so hat man 576 und 280, welche Zahlen das Verhältniß der Kräfte bestimmen. Nun ist 280 um 296 kleiner als 576; die Arbeiter im Fragesatze müßten daher, die Tuchbreite gleich gesetzt, eine geringere Ellenanzahl verfertigen, als die erstern. Allein setzt man die Anzahl der Arbeiter gleich: so sieht man, daß die Arbeiter im Fragesatze $1\frac{1}{2} = \frac{6}{4}$ Ellen in derselben Zeit mehr arbeiten, als die, welche $\frac{11}{4}$ breites Tuch zu verfertigen haben. Will man nun überlegen, ob nicht durch ihre Mehrzahl, nämlich von 296 Arbeitern, eben jene Mehrzahl von Ellen wieder aufgewogen oder übertroffen werden könne: so darf man nur 296 durch 280 dividiren, oder nur z. B. setzen:

280 A. : 296 Ar. = 1 El. : x E., woraus man sieht, daß, weil $\frac{296}{280} = 1 + \frac{2}{35}$ ist, die 296 A. nicht $1\frac{1}{2}$mal mehr arbeiten, als 280 Arb. Demnach, weil die Breite des Tuches hier Widerstand der Kraft ist, folglich die ihn bezeichnenden Zahlen verwechselt werden müssen (man sehe oben unter d), setzt man:

$$R . Z . Z' . Z'' : r . z . z' . z'' = W : w.$$

$$5 . 4 . 14 . \frac{11}{4} : 8 . 6 . 12 . \frac{5}{4} = x : 240.$$

oder $280 . 11 : 576 . 5 = x : 240$ (§. 148. Anm.)

oder $56 . 11 : x = 576 : 240$ (§. 144. Anm. und dividirt durch 5)

oder $616 : x = 36 : 15$ (divid. durch 16).

Woraus $x = \frac{2240}{36}{}^{*}$ … $= 256\frac{2}{3}$ Ellen gefunden wird.

Anmerkung. Nach der Reesischen Regel wäre dieß Beyspiel so angesetzt worden:

x El.	240 El.	
8 A.	5 A.	
6 T.	4 T.	
12 St.	14 St.	
5	4 E.	in Betreff der Tuchbreite.
4	11	

5. Beyspiel. Wenn 300 Belagerte in 12 Tagen 3600 lb. Fleisch verzehren, wie lange werden sie mit 600

andern hinzugekommenen Soldaten, welche 14400 lb. Fleisch mitbringen, an dem ganzen Fleisch-Vorrathe haben?

Da diese 600 Mann, das doppelte von 300, mehr als die doppelte Anzahl vom Fleische mitbringen: so werden nun die 900 Belagerten an dem ganzen Vorrathe = 18000 lb. Fleisch länger haben, als jene 300 an ihrem ersten Vorrathe.

Die Belagerten sind hier verzehrende Kräfte, und an die Stelle dessen, was wir sonst Wirkung nannten, tritt hier das, was jene verzehren. Es ist demnach

$$\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{Z} : \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{z} = \mathfrak{W} : \mathfrak{w}.$$

$$900 \cdot x : 300 \cdot 12 = 18000 : 3600.$$

oder $x : 4 = 5 : 1$; also $x = 20$ Tagen.

Anmerkung. Hätte man hier nach §. 165. verfahren wollen: so hätte man setzen müssen:

$$900 : 300 = 12 : y; \text{ also } y = \frac{300 \cdot 12}{900}; \text{ und } 3600$$

$$: 18000 = y : x; \text{ also } x = \frac{18000 \cdot y}{3600}.$$

Setzt man in diesem Werthe für x den gefundenen Werth für y: so ist $x = \frac{18000 \cdot 300 \cdot 12}{3600 \cdot 900}$. Auch hätte man nach §. 137. jene 2 Proportionen zusammensetzen können, woraus man erhalten hätte $900 \cdot 3600 : 300 \cdot 18000 = 12\, y \cdot yx$, oder (nach §. 148.) $3 : 5 = 12 : x$. Man sieht, daß man hier das erste Verhältniß in der ersten Proportion hatte umkehren und setzen müssen 900 : 300, weil 900 M. nicht solange, als 300 an demselben Vorrathe haben können; folglich das vierte Glied um so viel kleiner, als das dritte, werden muß, um wie viel kleiner das zweyte, als das erste, ist. Der Ansatz 300 : 900 wäre demnach dieser Regel entgegen gewesen. Allein auch hier brauchten wir, in sofern wir diese Aufgabe mittels unserer Formel berechneten, nicht darauf zu reflektiren, ob ein umgekehrtes Verhältniß vorkommen möge, oder nicht.

§. 168. 2. Zur zusammengesetzten Regel detri gehört die zusammengesetzte Zinsenrechnung, wenn die jährlichen Zinsen zum Kapital geschlagen, also Zinsen von Zinsen gegeben werden.

Beyspiel. Man soll finden, wie viel 1 fl., zu 5 Prozent ausgelehnt, nach 3 Jahren werth ist, wenn die jährlichen Zinsen immer wieder dazu geschlagen werden?

Man setze:

Fürs 1ste Jahr	100 fl. : 105 fl.	= 1 fl.	: z fl.
— 2te —	100 fl. : 105 fl.	= z fl.	: y fl.
— 3te —	100 fl. : 105 fl.	= y fl.	: x fl.

Also $100^3 : 105^3 = 1$ fl. : x fl. (§§. 147, 148).

daher $x = \frac{105^3}{100^3} = \frac{1157625}{1000000} = 1,157625$ fl. (§§. 64. 113)

Es erhellt leicht, 1) daß man durch $x = \frac{104^3}{100^3}$ dieselbe Frage beantworte, wenn 4 pro % bedungen sind; 2) daß man durch die 4te Potenz von $\frac{105}{100}$, oder durch $\frac{105^4}{100^4}$, (welche Potenz durch nochmalige Multiplikation der 3ten Potenz $\frac{105^3}{100^3}$ mit der Wurzel $\frac{105}{100}$ erhalten wird,) die Frage beantworte, wieviel 1 fl. nach 4 Jahren sey, wenn er Zins vom Zinse bringt. Wollte man dasselbe für 5, oder 6 Jahre u. s. w. wissen: so sieht man hieraus ein, wie man auf ähnliche Art verfahren müsse. 3) Erhellt auch, daß, wenn man dieselbe Frage in Absicht auf ein Kapital von 1000, 10000 fl. u. s. w. beantworten will, jener Bruch statt vorhin mit 1 nun nur mit 1000 oder 10000 multiplizirt werden dürfe, oder z. B. zu setzen sey: $\frac{105^3}{100^3} \times 1000$.

Anmerkung. Allein die Gesetze verbieten diese Art, die Kapitalien anzulegen, wobey man Zins vom Zinse nimmt, gegen den Wucherer zum Besten des Schuldners. Zwey

Fälle sind jedoch ausgenommen: 1) wenn ein Vormund für seine Pupillen auf obige Weise Kapitalien anlegen kann; 2) wenn A mit B einen Vertrag abschließt, daß A dafür, daß er dem B die Nutznießung seines Gutes auf eine gewisse Anzahl Jahre überläßt, von B ein Kapital auf Zins vom Zinse annehmen wolle. Dieser Vertrag wird der antichretische Vertrag genannt.

§. 169. 3. Auch gehört hieher die Berechnung der einfachen Zinsen auf Monate und Tage.

Beyspiel 1. Ein Bürger hat einzelne Summen Geldes an solche Landeskassen gegeben, von welchen er nach einer monatlichen Aufkündigung seine Kapitalien sammt Zins wieder zurückerhalten kann. Man setze, er habe

10000 fl. à 6 Prozent auf 9 Monate
7000 - - 5 - - - 6 - -
4000 - - 4 - - - 3 - -

nach geschehener Aufkündigung zu erheben, welche Summe baaren Geldes steht ihm dann zu Gebote?

Man kann die Rechnung auf verschiedene Art anstellen:

1) Durch Zusammensetzung der Proportionen nach §. 165. oder durch die reesische Regel nach §. 166. Wenn man nämlich die Zeit sowohl für 100, als für 10000 fl. gleich, oder = 12 Monat. setzt: so hat man nach §. 160. die erste Proportion. Da aber dasselbe Kapital um so weniger Zinsen bringt, je kürzere Zeit es steht: so hat man aus der Angabe der Monate die zweyte Proportion, und aus der Zusammensetzung dieser 2 Proportionen nach §. 165. die 3te gesuchte; nämlich

$100 : 10000 = 6 : \not{y}$ Eben so: $100 : 700 = 5 : y$

$12 : 9 = \not{y} : x$ $\qquad 12 : 6 = y : x$

$100.12 : 10000.9 = 6 : x.$ $\qquad 100.12 : 700.6 = 5 : x;$

Aus der ersten zusammengesetzten Proportion hat man $x = \frac{10000.9.6}{100.12} = 50.9 = 450$ fl., aus der 2ten findet man

x = 175 fl., als Zinsen von den Kapitalien von 10000 und 700 fl. Wenn man nun auf gleiche Weise den Zins in Ansehung obiger 4000 fl. für 3 Mon. berechnet: so findet man denselben = 40 fl. Demnach ist die Summe der Zinsen = 665 fl., also die ganze disponible, oder zu erhebende Summe = 21000 + 665 = 21665 fl.

Nach der Reesischen Regel hatte man folgende 3 Ansätze, wobey die Abkürzung sehr leicht ist:

x	10000 fl.	x	7000	x	4000
100 fl.	6 fl.	100	5	100	4
12 Mon.	9 Mon.	12	6	12	3
x	450	x	175	x	40.

2) Man kann auch jeden Zins auf 1 von Hundert, so wie die Zeit für jedes Kapital auf 1 Mon. oder 1 Tag bringen. Durch diese 2 Arten von Reduktionen wird es möglich, die Kapitalien zu summiren, und durch eine einzige Proportion die Zinssumme zu finden.

Die erste Art der Reduktion vollendet man dadurch, daß man mit dem angegebenen Zinsfuße die entsprechende Kapitalsumme multiplizirt. Die zweyte Art von Reduktion wird vollendet, wenn man die durch die vorige Multiplikation erhaltenen Summen mit der entsprechenden Zahl der angegebenen Monate oder Tage multiplizirt.

Es ist nämlich offenbar dasselbe, ob man spricht: 10000 fl. bringen 6 fl. Zins vom Hundert, oder: 60000 fl. bringen 1 fl. Zins vom Hundert, indem diese Verminderung des Zinses um das Sechsfache wieder durch die gleichvielfache Vermehrung des Kapitals ausgeglichen wird. Eben so macht es keinen Unterschied, ob man annimmt, 6000 fl. stehen auf 9 Monate, oder 60000 . 9 d. i. 540000 fl. stehen auf 1 Mon.

Man kann demnach unser Beyspiel so ansetzen:

60000 fl. à 1 pro %	;	540000 auf 1 Mon.
35000 - - - - - -	;	210000 - - -
16000 - - - - - -	;	48000 - - -
		Summe 798000.

Da nun eben so 100.12 oder 1200 fl. auf 1 Mon. denselben Zins geben, welchen 100 fl. in 12 Mon. oder 1 Jahre bringen: so hat man die einzige Proportion:

1200 : 798000 = 1 : x, woraus x = 665, wie vorhin, gefunden wird.

Diese letztere Art, derley Beyspiele zu berechnen, ist besonders für Handelsleute, oder Commissionäre, welche gegeneinander abzurechnen haben, sehr bequem.

Beyspiel 2. Der Kaufmann A hat für den Kaufmann B bezahlt 500 fl. den 20ten Januar, 300 fl. den 8ten May, 900 fl. den 10ten Oktober. Dagegen hat B für A gezahlt 800 fl. den 10ten Februar, 200 den 24ten Juny, 1000 fl. den 7ten November. Am Schlusse des Jahres will nun A berechnen, wieviel er noch herauszugeben, oder von B zu empfangen habe. Gesetzt nun, es seyen 6 pro % verabredet; man sey ferner darin übereingekommen, jedem Monate 30 T., also dem Jahre 360 T. zu geben; so wird A seine Rechnung auf folgende Art vollenden:

A zahlte für B 1700 fl., dieser für A 2000 fl., also muß A noch 300 fl. zahlen. Allein den Zins betreffend, giebt die Rechnung:

A fodert den Zins von

500 fl. a. 11 M. 10 T. od. a. 340 T., od. v. 500.340 = 170000 fl. a. 1 T.;
300 - - 7 - 22 - - - 232 -, od. - - - 69600 - - - -
900 - - 2 - 20 - - - 80 -, od. - - - 72000 - - - -

Summe 311600 - - - -

Gegenfoderung des B Summe 298200 - - - -

Also hat A noch von B zu fodern den Zins von 13400 fl. - - -

Da nun 100 fl. in 1 J. oder 360 T., oder 100.360 d. i. 36000 fl. in 1 T. 6 fl. Zins bringen sollen: so findet man durch die Proportion

36000 : 13400 = 6 : x

den gesuchten Zins x = 0,37 fl. oder 21 kr. beynahe. Diesen Zins kann A von der an B schuldigen Summe = 300 fl. abziehen.

§. 170. 4. Zur zusammengesetzten goldnen Regel gehört die sogenannte Kettenregel, die man zur Verwandlung einer benannten Zahl in eine gleiche, aber von entfernterer Art, oder zur mittelbaren Vergleichung von Gewichten, Münzen, Maßen anwendet. Die Regel hat ihren Namen davon, daß, alles in Verhältnissen ausgedrückt, immer das erste Glied jedes folgenden Verhältnisses von einerley Art oder Namen mit dem letzten Gliede des vorhergehenden Verhältnisses ist; daß folglich die Glieder dieser Verhältnisse, wie die Glieder einer Kette, in einander greifen. Handelsleute bedienten sich dieser Regel lange vor Rees; man muß sie folglich von der Reesischen Regel unterscheiden.

Man kann die Kettenregel so geben:

Man fängt mit der gesuchten Größe an. Ihr gegenüber rechter Hand setzt man die gezählte Größe, die verwandelt werden soll. Linker Hand setzt man von den gegebenen diejenige, welche von einerley Art mit der vorhergehenden rechter Hand ist; ihr wieder gegenüber setzt man diejenige gezählte Größe, welche, wie die Aufgabe angiebt, denselben Werth mit der vorigen linker Hand hat. Dann setzt man wieder zur Linken eine gezählte Größe, die mit der nur so Rechts gesetzten von einerley Art ist. So fährt man auf die angegebene Art fort, bis zur Rechten eine gezählte Größe vorkömmt, die mit der gesuchten einerley Qualität hat. Uebrigens verfährt man, wie bey der Reesischen Regel.

Beyspiel. Man will 1000 Rthlr. in Friedr. d'or nach Holland übermachen: wie viel macht dieß dort in holl. Dukaten, wenn der Cours gegen Gold 135 Prozent (d. i. 135 Rthlr. in Gold sind 100 Rthlr. holl. Courant), und 1 Duk. = 5 fl. 4 Stüver; 1 fl. = 20 Stüver, und $2\frac{1}{2}$ fl. = 1 Rthlr. holl. Cour. ist?

Man setze:

x Duk.	1000 Thl. in Frd.	oder	x	1000
135 Thl. in Frd	100 Thl. h. Cour.		27	100
2 Thl. h. C.	5 fl. holl. C.		1	10
1 fl. h. C	20 Stüv. h. C.		104	1
104 Stüv. h. C.	1 Duk.			
			2808x	1000000

woraus man $x = \frac{1000000}{2808} = 356 \frac{44}{351}$ Duk. erhält.

Anmerkung. 1. Daß diese Kettenregel, nichts anders ist, als eine Abkürzung des Verfahrens durch Zusammensetzung der Verhältnisse, sieht man deutlich daraus, wenn man alles in Verhältnissen darstellt, und diese dann nach §. 137. zusammensetzt.

Die vorige Aufgabe steht nämlich so:

135 : 100 = 1000 Thl. in Fr. d'or : z Thl. h. C.
2 : 5 = z Thl. h. C. : w fl. h. C.
1 : 20 = w fl. h. C. : y Stüv. h. C.
104 : 1 = y St. h. C. : x Duk.

135 . 2 . 1 . 104 : 100 . 5 . 20 . 1 = 1000 : x Duk. (§. 138.).

woraus $x = \frac{1000 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 20}{135 \cdot 2 \cdot 104} = 356 \frac{44}{351}$ Duk. hervorgeht.

Ein Kaufmann zu Danzig will wissen, auf wieviel pohlnische Gulden die Danziger Elle eines Zeuges zu stehen komme, wenn die Brabanter Elle (wovon 5 = 6 Danziger Ellen) in Amsterdam 30 Stüber banko kostet, und (da er durch Wechsel zahlen will) der Wechselgang zwischen Amsterdam und Danzig 400 Groschen (wovon 30 = 1 pohln. Gulden) für 1 Pfund Flämmisch oder für 120 Stüber bko. ist.

Man setze:

x pohln. fl.	1 Danz. El.	oder	x	
6 Danz. El.	5 Brab. El.		3 6	5
1 Brab. El.	30 Stüb. bko.			30
120 Stüb. bko.	400 Groschen		3 120	400 10 5
30 Gr.	1 pohln. fl.		30	
			9	25

Also $x = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$ pohln. fl. $= 83\frac{1}{3}$ Groschen.

Anmerkung. 2. Bey einfachen mittelbaren Resolvirungen (§. 158.), wo man die Einheit höherer Art gleichsetzen kann einer gleichen Zahl der nächstniedern Art, kann man sich die Rechnung erleichtern, wenn man blos die zu verwandelnde Zahl höherer Art multiplizirt durch das Produkt derjenigen Zahlen, welchen Stufenweise herab (bis auf die (incl.), welche mit derjenigen einerley Qualität hat, in welche verwandelt werden soll,) immer die Einheit der nächsthöheren Art gleich ist. Z. B. man soll 22° d. i. 22 Grade in Sekunden ausdrücken. Da nun 1 = 60', und 1' = d. i. 60'': so ist

$22° = 60 . 60 . 22$ Sek. $= 79200''$. Man hätte nach dem Vorigen setzen müssen:

x''	$22°$	oder $1° : 22° = 60' : y'$
$1°$	$60'$	$1' : y' = 60'' : x$
$1'$	$60''$	
x''	$79200''$	$1 : 22y' = 60 . 60 : y'x$

also $y'x = 22y' . 60 . 60$, woraus $x = 22 . 60 . 60$.

So ist der Werth für 36 Tage in Sekunden ausgedrückt $= 36 . 24 . 60 . 60 = 3110400''$.

Sollte man umgekehrt diese Sekundenanzahl in die benannte Zahl von Tagen verwandeln, oder auf Tage reduziren; so dividirte man die gegebene benannte Zahl durch das Produkt jener Zahlen, welche Stufenweise hinauf (bis auf die (incl.), welche von einerley Art mit der ist, in welche verwandelt werden soll) einer Einheit der immer nächsthöheren Art gleich sind. So erhält man aus der vorigen Sekundenzahl $\frac{3110400}{60 . 60 . 24} = 36$ Tagen.

In dem vorigen ersten Beyspiele, wo man eine benannte Zahl höherer Art in eine gleiche Zahl niederer entfernterer Art zu verwandeln, oder zu resolviren hatte, brauchte man darum ein bloses Produkt mehrerer Zahlen zu berechnen, weil das Produkt aus blosen Einheiten der Divisor jenes Produktes ist; und im zweyten Beyspiele der Reduktion, wo man eine benannte Zahl niederer Art in eine gleiche

benannte Zahl höherer entfernterer Art zu verwandeln hatte, war eine blose Division nöthig, weil der Faktor der gegebenen Zahl ein Produkt aus lauter Einheiten ist.

Sind daher in einem Resolvirungsfalle statt der Einheiten andere Zahlen höherer Art anderen niederer Art gleichgesetzt: so findet man das Gesuchte, wenn man das Produkt der ersten Zahlen, statt des Produktes aus den Einheiten in unseren vorigen Beyspielen, zum Divisor macht. Und im Reduktionsfalle findet man das Gesuchte, wenn man das Produkt aus den gegebenen Zahlen niederer Art, welche andern Zahlen höherer Art gleichgesetzt sind, statt des Produktes aus den Einheiten in unserem letzten Beyspiele, zum Faktor der zu verwandelnden Zahl macht.

Beyspiel 1. Wenn 11 Dukaten = 20 Laubthaler und 4 Laubthaler = 11 fl., wieviel fl. machen 100 Dukaten?

Antwort: $\frac{100.20.11.}{11.4} = \frac{2000}{4} = 500$ fl.

Beyspiel 2. Wenn 2 Rubel = 95 Stüber, 20 Stüber = 1 fl. holl., 5 fl. holl. = 2 Bancothlr., 100 Bancothlr. = 142 Rthlr., 3 Rthlr. = 1 Duk. sind, wieviel Dukaten machen 1000 Rubel?

Antwort: $\frac{1000.95.1.2.142.1}{2.20.5.100\ 3} = 449\frac{2}{3}$.

Da nämlich hier eine benannte Zahl niederer Art in eine andere höherer Art soll verwandelt werden: so wird das Produkt aus den Zahlen niederer Art, welche andern höherer Art gleichgesetzt sind, der Faktor von 1000.

C. Theilregel.

§. 171. Zur Theilregel (§. 156.) gehört 1) die **Gesellschaftsrechnung**, und 2) die **Vermischungsrechnung**, welche aber nur ihrem Gegenstande nach von der vorigen verschieden ist; 3) die **Habereyrechnung**; 4) die **Falcidienrechnung**; 5) die **Durchschnittsrechnung**. Man hat 6) in die praktische Rechenkunst auch

die Alligationsrechnung aufgenommen (ungeachtet die allgemeine Regel, die hier einschlagenden Beyspiele zu berechnen, nur in der Buchstabenrechenkunst gegeben werden kann). Diese Rechnung betrifft diejenigen Fälle, wo man zweyerley Materien vom verschiedenen Werthe oder Gehalte so untereinander mengen soll, daß eine Mischung von einem Mittelwerthe herauskömmt.

I. Die Sozietätsrechnung. Die Regel zur Berechnuug aller hier einschlagenden Beyspiele ist diese:

Man dividire das gegebene Ganze durch die Summe der Verhältnißzahlen, so wie sie gegeben sind, oder so, wie man sie durch das gemeinschaftliche Maß auf kürzere Ausdrücke gebracht hat; 2) Diesen Quotienten multiplizire man dann nach und nach mit jeder einzelnen Verhältnißzahl: so findet man den jeder Verhältnißzahl entsprechenden Theil, und folglich alle Theile, in welche das Ganze getheilt werden soll.

Beyspiel. Drey Kaufleute A, B, C legen 10000 fl. zusammen, und gewinnen damit 2400. A hat 2000 fl. B 3000 fl. und C 5000 fl. gegeben, wieviel erhält jeder von dem Gewinne nach Verhältniß seines Beytrages?

Das verhältnißmäßig zu vertheilende Ganze ist also hier 2400 fl.; und die Verhältnißzahlen selbst sind 2000, 3000, 5000, oder, alle durch 1000 dividirt, die Zahlen 2, 3, 5, deren Summe 10. Also ist hier 1) jener Quotient aus dem Ganzen, durch die Summe der Verhältnißzahlen dividirt, $= \frac{2400}{10} = 240$. Multiplizirt man nun 2) diesen Quotienten 240 mit 2: so findet man 480, als den ersten verhältnißmäßigen Gewinnantheil für A; und $240 \times 3 = 720$ ist der Gewinnantheil für B im Verhältniß seiner Einlage; endlich $240 \times 5 = 1200$ ist der verhältnißmäßige Gewinnantheil für C; oder

A erhält am Gewinne 2400 den Theil = 480
B . . . . = 720
C . . . . = 1200

Summe 2400

Beweis. Das Ganze nach gegebenen Verhältnißzahlen theilen heißt, man soll das Ganze so theilen, daß

die 1ste Verhältnißzahl ist zu ihrem Theile,
wie die 2te . . . zu ihrem Theile,
wie die 3te . . . zu ihrem Theile
u. s. w. ——— u. s. w.

In diesen 3 gleichen Verhältnissen ist also nach §. 149. die Summe der Verhältnißzahlen zur Summe der entsprechenden Theile, oder zum gegebenen Ganzen, wie jede Verhältnißzahl zu ihrem Theile = x.

Multiplizirt man daher nach der goldenen Regel (§. 145.) das gegebene Ganze mit jeder Verhältnißzahl nach und nach, und dividirt dieses Produkt jedesmal durch die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen: so erhält man den der Verhältnißzahl, die man als Faktor brauchte, entsprechenden Theil des Ganzen.

Demnach wechselt nur der Faktor des beständigen Quotienten, den man erhält, wenn man das Ganze durch die Summe der Verhältnißzahlen dividirt.

Unser obiges Beyspiel müßte diesem Beweise gemäß mit weniger Kürze folgendermaßen, um es zu berechnen, angesetzt werden.

$2 + 3 + 5 : 2400 = 2 :$ Antheil von A
$2 + 3 + 5 : 2400 = 3 :$ — — B
$2 + 3 + 5 : 2400 = 5 :$ — — C

Also erhält A $\frac{2400}{10} \cdot 2$ fl. = 480 fl.
B $\frac{2400}{10} \cdot 3$ fl. = 720 fl.
C $\frac{2400}{10} \cdot 5$ fl. = 1200 fl.

} = 2400 fl.

Zusatz 1. Man sieht, daß dieses Verfahren, wie sein Beweis, unverändert bleibt, man mag der Verhältnißzahlen so viele geben, als man wolle. Eben so erhellt, daß die Probe, ob man die wahren Theile des Ganzen wirklich aufgefunden habe, darin bestehe, daß man die gefundenen Zahlen addirt, deren Summe gleich seyn muß dem zu theilenden Ganzen.

Zusatz 2. Sind zusammengesetzte Verhältnisse gegeben, so darf man sie nur auf einfache bringen, indem man die Produkte für die Verhältnißzahlen nimmt; z. B. wenn A 2000 fl. auf 3 Jahre, B 4000 auf 2 J., indem er 1 Jahr später mit A in Compagnie trat, und C, welcher erst $\frac{1}{2}$ J. beygetreten ist, 5000 fl. auf $\frac{1}{2}$ J. gegeben hätte: so ist es eben so viel, als wenn A gleich Anfangs $2000 . 3 = 6000$ fl.; B $4000 . 2 = 8000$; C $5000 . \frac{1}{2} = 2500$ fl. gegeben hätte, so, daß nun diese Produkte die Verhältnißzahlen für die Rechnung sind.

Man irrt sich, wenn man glaubt, es würde bey diesem Verfahren keine Rücksicht auf die Zinsen genommen, welche die verschiedenen Summen Geldes geben können. Man setze, jede einzelne Summe könne zu 5 Prozent angelegt werden: so würden die 2000 des A in 3 Jahren 300 fl. Zins, d. i. denselben Zins bringen, welchen 6000 fl. in 1 J. geben. Eben so mit den folgenden Summen. Jene Produkte 6000, 8000 rc. sind also die für einerley Zeit berechneten, also die wahren Verhältnißzahlen.

Auf gleiche Weise müßte man die Frage beantworten: wie sind 20 fl. unter 3 Bauern, welche bey einem Durchmarsche mehr Soldaten hielten, folglich jene Summe als Vergütung erhalten müssen, zu vertheilen, wenn A 4 Mann 5 Tage lang, B 6 Mann 7 T., C 8 Mann 3 T. lang gehalten hat? Hier sind $4 . 5 = 20$; $6 . 7 = 42$; $8 . 3 = 24$, oder 10, 21, 12 die zu brauchenden Verhältnißzahlen, und der beständige Quotient ist $\frac{20}{43}$.

Zusatz 3. Sollten die gegebenen Verhältnißzahlen Brüche seyn von verschiedenen Nennern: so bringt man sie auf einerley Nenner (§. 79) und nimmt dann blos die Zähler für die Verhältnißzahlen (§ 148 Zus.). Z. B. Es wäre das Ganze nach den Verhältnißzahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}$ zu theilen: so setzte man dafür die Zahlen 28, 42, 16, oder 14, 21, 8.

Beyspiel. Es sollen 391 fl. Steuer von 4 Bauern, wovon A $\frac{1}{2}$ Hof, B 1 ganzen, C $1\frac{1}{4}$, D $1\frac{1}{2}$ Hof besitzt, bezahlt werden; wieviel muß jeder nach seinem Gutsbesitze an jener Summe tragen?

Obige Zahlen $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$ auf ganze Zahlen gebracht, hat man die Verhältnißzahlen 8, 16, 20, 24, oder kürzer, 2, 4, 5, 12, deren Summe = 23; also der beständige Quotient = $\frac{391}{23}$ = 17. Demnach zahlt A 17.2 = 34; B 17.4 = 68; C 85, D 204 fl.

Zusatz 4. II. Vermischungsrechnung. Sie betrifft die Fälle, wo man, wenn die Verhältnißzahlen der Ingredienzen gegeben sind, ihre Quantität für eine gegebene Quantität der Mischung finden soll. Da diese Rechnung, wie schon oben bemerkt wurde, nicht wesentlich von der Gesellschaftsrechnung verschieden ist: so gilt auch für diese die vorige Regel.

Beyspiel. Wenn bey Verfertigung guten Schießpulvers auf 16 Loth Salpeter 3 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel gerechnet werden, wieviel von jeder Art gehören zu 100 lb. Schießpulver?

Hier ist $16 + 3 + 2 = 21$, und $\frac{100}{21}$ der beständige Quotient; folglich braucht man

1) $\frac{100}{21} \cdot 16 = 76\frac{4}{21}$ lb. Salpeter,

2) $\frac{100}{21} \cdot 3 = 14\frac{6}{21}$ lb. Kohlen,

3) $\frac{100}{21} \cdot 2 = 9\frac{11}{21}$ lb. Schwefel.

Summe 100 lb. Schießpulver.

Auf gleiche Weise werden die folgenden Beyspiele berechnet:

1) Wenn man zum Giesen guter Kanonen auf $\frac{2}{3}$ ℔ Messing 1 ℔ Zinn und 12 ℔ Kupfer rechnet: wieviel braucht man zum Giesen einer Kanone von 5000 ℔?

2) Zur Fertigung feinen rothen Siegellaks nimmt man 2 ℔ Terpertin, 3 ℔ Zinnober, 3 ℔ Schellak und $\frac{1}{2}$ ℔ Kreide; wieviel muß man von jedem Ingrediens nehmen, wenn man nur 6 ℔ Siegellak bereiten will?

Zusatz 5. III. Habereyrechnung. Diese Rechnung hat die verhältnißmäßige Vertheilung des Schadens zum Gegenstande, welcher dadurch entsteht, wenn bey einem Sturme auf dem Meere Waaren ausgeworfen werden müssen, um das Schiff zu retten. Der Vertheilung dieses Schadens liegt das Seegesetz zum Grunde:

Wenn zur Rettung eines Schiffes Waaren ausgeworfen werden müssen: so haben alle, welche Waaren auf dem Schiffe haben, nach dem Werthe derselben, und der Eigenthümer des Schiffes ebenfalls nach dessen Werthe an dem Verluste zu tragen. Nur die Reisenden, welche lediglich ihr Gepäcke auf dem Schiffe haben, sind frey.

Beyspiel. Es müssen 2 Fässer Kaffee, dem Kaufmann A gehörig, Werth 700 fl., einige Kisten Farbstoff, dem B gehörig, Werth 1000 fl., ausgeworfen werden. Dadurch werden dem Kaufmanne C Weine, deren Werth = 6000 fl., dem D Zucker 2000 fl. am Werthe, dem E Tücher, deren Werth = 7000 fl., dem Schiffer F das Schiff, 10000 fl. werth, gerettet. Was muß nun jeder an dem ganzen Verluste von 1700 fl. tragen?

Durch Weglassung von 2 Nullen in jenen Zahlen hat man die Verhältnißzahlen:

für A, B, C, D, E, F

7, 10, 60, 20, 70, 100, deren Summe = 267, daher der beständige Quotient = $\frac{1700}{267}$. A muß also am Verluste tragen $\frac{1700}{267} \cdot 7 = 44\frac{152}{267}$ fl.; B $63\frac{172}{\ldots}$; C das 6fache

des B oder 382 $\frac{6}{\ldots}$; D das 2fache des B, oder 127 $\frac{21}{\ldots}$; E das [illegible]ache des B, oder 446 $\frac{18}{\ldots}$; F das 10fache des B, oder 636 $\frac{128}{\ldots}$ fl. Diese einzelnen Antheile am Verluste geben wieder zusammengenommen die Summe 1700 fl. Weil nun A 700 fl. zu fodern, aber 44 $\frac{152}{267}$ fl. zu tragen hat, Aehnliches auch von B gilt: so findet man durch Subtraktion, welche Vergütung beyden Kaufleuten gebühre.

Zusatz 6. IV. Falcidienrechnung. Diese Rechnung betrifft den Fall, wo der Haupterbe den 4ten Theil des Vermögens (quartam falcidiam) des Erblassers anspricht, oder sich denselben, bevor er die Erbschaft antritt, ausdrücklich vorbehält, wenn er zweifelt, ob nicht die sogenannten Legate oder die Nebenvermächtnisse entweder dem hinterlassenen Vermögen gleich seyn, oder dasselbe noch übersteigen werden.

In diesem Falle nun gilt die Anwendung des von den Römern auf Anrathen des Falcidius aufgestellten Gesetzes:

Wenn in einem Testamente die Legaten mehr als $\frac{3}{4}$ des hinterlassenen Vermögens ausmachen: so darf der Haupterbe $\frac{1}{4}$ des Vermögens zum Voraus nehmen, und die übrigen $\frac{3}{4}$ sollen unter die Legatarien nach der im Testamente festgesetzten Ordnung vertheilt werden.

Beyspiel. Das eine Legat für A betrage 400 fl., das für B 2000, für C 2500 fl.; das ganze Vermögen des Erblassers finde sich = 5400 fl. Weil nun die Legatensumme = 9400 größer ist, als $\frac{3}{4}$ von 5400, oder größer, als 4050: so nimmt der Haupterbe $\frac{1}{4}$ vom Ganzen, nämlich 1350 fl. für sich weg. Nun ist die Frage, wie müssen die übrigen 4050 fl. unter die Legatarien vertheilt werden?

Man kann die Antwort auf doppelte Weise finden: einmal, indem man nach der Gesellschaftsregel sucht, wieviel ein jeder Legatar an der Summe 850 fl., um welche 4050 fl. kleiner sind, als die Legatensumme, auf seinen Antheil nehmen müsse. In diesem Falle, da die Summe der Verhält-

nißzahlen durch Abkürzung = 49 ist, hat man den beständigen Quotienten = $\frac{850}{49}$, diesen mit 4, 20, 25 einzeln multiplizirt, findet man für A $69\frac{19}{49}$; für B $346\frac{46}{49}$, für C $433\frac{33}{49}$ fl. Demnach bekömmt A nur $400 - 69\frac{19}{49}$, d. i. $330\frac{30}{49}$ fl.; B nur $1653\frac{3}{49}$, C $2066\frac{16}{49}$ fl.

Oder man löst nach der einfachen goldenen Regel dieselbe Frage so: Von der Summe 4900 soll A 400 fl. bekommen, wieviel muß er von der Summe 4050 fl. erhalten? Man setzt demnach

$4900 : 4050 = 400 : x$, wo x, wie vorhin, sogleich = $330\frac{30}{49}$ fl. gefunden wird. Eben so sucht man, was B und C erhalten müssen: diese Summen addirt, muß die Summe 4050 wieder herauskommen.

§. 172. V. **Durchschnittsrechnung.** Diese betrifft diejenigen Fälle, wo man ein aus ungleichen Theilen zusammengesetztes Ganze in gleiche Theile theilen soll. Rechnet man nämlich die verschiedenen Theile, welche auf eine gewisse Anzahl Dinge kommen, zusammen; so fragt sich: wieviel jener Theile, einen in den andern gerechnet, kommen auf eines jener Dinge?

Die Regel ist hier diese: man dividire die Summe der gegebenen Theile durch eben jene Anzahl von Dingen.

Beyspiel. Man will den mittleren Ertrag eines Weinberges, Stückes Feld, oder ganzen Gutes aus seinem drey- oder sechs- oder zehnjährigen beobachteten verschiedenem Ertrage berechnen; war z. B. der Ertrag im 1sten Jahre = 324 fl.; im 2ten J. = 264 fl.; im 3ten = 402 fl.: so ist der dreymalige Ertrag des Gutes = 990 fl.; also ist 1 Ertrag, seine verschiedene Werthe in einander gerechnet, oder der mittlere Ertrag = $\frac{990}{3}$ = 330 fl.

Hieher gehört auch die Auflösung der Aufgabe: den mittleren Werth der Mischung zu finden, wenn die Menge und der Werth der gemischten Dinge gegeben sind.

Die hier zu beobachtende, von der vorigen Auflösung nicht wesentlich verschiedene, Regel ist folgende: man multi-

plizire den Werth eines jeden Ingredienz der Mischung durch seine Quantität, addire diese Produkte, und dividire ihre Summe durch die Anzahl der zur Mischung gebrauchten Dinge.

Beyspiel 1.

					Produkte	
10	Mark	Silber	14	löth.	140	Loth
8	—	—	13	—	104	—
14	—	—	9	—	126	—
32					370	

Beyspiel 2.

					Produkte	
4	Loth	Silber	10	löth.	40	Loth
8	—	—	12	—	96	—
6	—	—	14	—	84	—
18					220	

Es sind also bey Beysp. 1. in einer Mark der Mischung $\frac{370}{32} = 11\frac{9}{16}$ Loth fein Silber. Aber bey Beysp. 2. zeigen die Produkte nur 16theilchen an, weil nach köllnischem Markgewicht $\frac{1}{2}$ lb. oder 16 Loth = 1 Mark ist; daher sind in 1 Loth der Mischung $\frac{220}{18}$ oder $12\frac{2}{9}$ solcher 16theilchen fein Silber enthalten.

Es bleibt dieselbe Rechnung, wenn die Aufgabe so hieße: man mischt

10 Eimer Wein, den Eimer à 14 fl.
8 — —, — — à 13 —
14 — —, — — à 9 —

untereinander, was ist 1 Eim. des gemischten Weines werth? Aehnliches gilt, wenn von Fudern oder Maßen die Rede ist.

Zusatz. Die ähnlichen Aufgaben rücksichtlich des Goldes werden auf gleiche Weise aufgelößt, wie die vorige rücksichtlich des Silbers; nur hat man zu bemerken, daß die Mark Goldes nicht, wie beym Silber in 16 (Lothe), sondern in 24 gleiche Theile oder Karate, getheilt werde, so, daß das feine oder unvermischte Gold 24karätiges, aber 23- 21- oder 18karätiges Gold u. s. w. genannt wird, je

nachdem 1 Theil, oder 3, oder 6 Theile u. s. w. Zusatz eines geringeren Metalls in der Mark enthalten sind.

Beyspiel 3. Drey Sorten Goldes A, B, C, wovon A = 2 Mark 22karätig; B = 5 Mark 20kar.; C = 7 Mark 18kar. enthält, sollen zusammengeschmolzen werden: wieviel karätig wird das gemischte Gold seyn? Man findet die Antwort wie in Beysp. 1., daß die Mischung 19$\frac{2}{7}$karät. Gold enthalte.

Allein rücksichtlich des Zinns findet eine andere Rechnung statt. Denn der Zinngießer pflegt die Güte des Zinns durch Pfunde auszudrücken, deren Zahl sich nach dem Zusatze an Bley richtet; so nennt er 3pfündiges Zinn dasjenige, dessen 3ter Theil Bley ist, u. s. w. Das beste Zinn nennt er das englische oder 10pfündige, welches 9 ℔ reines Zinn und 1 ℔ Bley enthält. Demnach sagt hier der Ausdruck 3- oder 4pfünd. Zinn nicht unmittelbar, wie beym Silber und Golde, wieviele Pfunde feines oder reines Zinn, sondern zunächst, wieviele Pfunde Bley im Zinn enthalten seyen. Hieraus erhellt, daß die Rechnung anders, oder auf folgende Weise geführt werden müsse:

Beyspiel. Wenn 20 ℔ 5pfündiges Zinn mit 12 ℔ 3pfünd. Zinn zusammengeschmolzen werden: ein wievielpfündiges Zinn enthält die Mischung?

Man suche, wieviel ℔ Bley in jenen 20 und 12 ℔ Zinn enthalten seyen; man findet $\frac{20}{5}$ und $\frac{12}{3}$, d. i. in jedem 4 ℔ Bley. Nun ist 20 + 12 = 32; man schließe also: wenn in 32 ℔ Zinn 8 ℔ Bley enthalten sind, wieviel enthält 1 ℔ der Mischung? Man findet $\frac{8}{32}$, oder $\frac{1}{4}$, d. i. das zusammengeschmolzene Zinn ist 4pfündig.

Anmerkung. Bey Repartitionen, die nach der Sozietätsregel zu berechnen sind, nennt man diejenige Zahl, welche anzeigt, in welchem Verhältnisse jeder Theilnehmende in Anschlag zu bringen ist, den Fuß, und die Produkte der Zahlen, welche man bey den hiebey zu nehmenden Rücksichten findet, heißen der mittlere Reparti-

tionsfuß. Es sey z. B. eine Brandkollekte von 1410 Thlr. unter 3 Verunglückte A, B, C zu vertheilen. Da nun hiebey berücksichtigt werden muß, den wievielsten Theil seines Vermögens jeder verloren hat, und wieviel jeder von seinem eigenen Vermögen zum Bau verwenden will: so erhalten wir, wenn wir setzen

A verlor $\frac{1}{2}$ seines Vermögens und giebt 40 Rthlr.
B — $\frac{1}{3}$ — — — — 204 —
C — $\frac{1}{4}$ — — — — 400 —

aus den Produkten $\frac{1}{2} . 40$; $\frac{1}{3} . 204$; $\frac{1}{4} . 400$ den mittleren Repartitionsfuß. Diese Produkte sind resp. = den Zahlen 5, 17, 25, ihre Summe 47 und der Quotient aus $\frac{1410}{47} = 30$; folgl. erhält A. 30. 5; B. 30. 17; C. 30. 25. (§. 171.).

§. 173. VI. **Alligationsrechnung.** Diese (§. 171.) unterscheidet sich von der Gesellschafts- und Vermischungsrechnung dadurch, daß in ihr das Verhältniß der Theile nicht unmittelbar gegeben, sondern erst zu suchen ist.

Aus der Buchstabenrechnung (bestimmt — aus der Algebra) geht folgende Regel zur Berechnung der hieher gehörigen Beyspiele hervor:

Man schreibe den höheren und geringeren Preis oder Gehalt untereinander, den mittlern zur Linken. Zur Rechten setze man bey dem höhern den Unterschied des geringeren vom mittlern, und bey dem geringeren den Unterschied des höheren vom mittlern Preise oder Gehalte: so zeigen diese Unterschiede das Verhältniß, in welchem man die Theile vom Bessern u. Schlechtern nehmen müsse.

Beyspiel. Wein zu 15 Thlr. der Eimer, soll mit Wein zu 10 Thlr. so gemischt werden, daß ein Wein zu 13 Thlr. der Eimer erhalten wird;

Oder 15löthiges Silber soll mit 10löthigem in dem Verhältniß gemischt (legirt, wie man hier das Mischen nennt,) werden, daß die Mischung 13löthig wird.

Man setze, wie folgt, nach der Regel

$$13\left|\begin{matrix}15\\10\end{matrix}\right|\begin{matrix}3)\\2)\end{matrix} = 5.$$

Nämlich 3 − 10 = 3, neben 15, dem höhern Preise oder bessern Gehalte, gesetzt, und 15 − 13 = 2, neben 10, dem geringern, gesetzt. Wenn folglich 3 Theile vom Bessern genommen werden: so müssen 2 Theile vom Geringern genommen werden; d. i. auf 3 Theile des bessern Weins 2 Theile vom geringern; oder auf 3 Th. 15löth. Silber kommen 2 Th. 10löth.

Zusatz 1. Soll eine bestimmte Menge der Mischung herauskommen, z. B. 40 Mark Silber: so setzt man:

5 : 3 = 40 : x, wo x = 24;

d. i. es müssen 24 Mk. vom bessern Silber mit 16 Mk. vom schlechtern legirt werden (denn 40 − 24 = 16).

Oder, wenn 35 Mk. vom 15löth. S. vorräthig wären, wieviel müßte 10löth. hinzugesetzt werden, um 13löthiges zu bekommen? Hier setzte man

3 : 2 = 35 : x = 23 $\frac{1}{3}$ 10löth. S. als Zusatz gefunden wird.

Zusatz 2. Wenn 3 Materien auf obige Art gemischt werden sollen: so muß man je 2 Werthe, einen größeren und kleineren, mit dem Mittelwerthe, welcher zwischen jene 2 Werthe fällt, vergleichen. Dann werden die Unterschiede zwischen dem mehrmals verglichenen geringeren Werthe und dem entsprechenden größeren Werthe oder Preise gesucht, diese Unterschiede addirt, und durch die erhaltene Summe werden die den besseren Materien beygeschriebenen Zahlen dividirt; — eben so addirt man die der geringeren, und mehrmals verglichenen, Materie beygeschriebenen Zahlen, und dividirt die gefundene Summe durch die vorige Summe. Die Quotienten zeigen dann an, in welchem Verhältnisse man die Theile von jeder Materie zur Mischung nehmen müsse.

Beyspiel. Man will 3 Sorten Kaffee A, B, C, wo das Pfund von A 1$\frac{1}{2}$ fl., von B 1 fl., von C $\frac{2}{3}$ fl. oder 40

kr. kostet, untereinander mischen, damit man das ℔ um 54 kr. oder $\frac{9}{10}$ fl. geben könne. In welchem Verhältnisse müssen die Theile von jeder Sorte genommen werden?

Will man hier die Brüche vermeiden: so muß entweder alles auf Kreutzer, oder die Brüche müssen auf einerley Nenner gebracht, und dann die Zähler als die Verhältnißzahlen betrachtet werden. In beyden Fällen erhält man für A, B, C die Zahlen 90, 60, 40 für den Mittelpreis 54.

Man setze nun:

$$54\left|\begin{array}{c|c} 90 & 14 \\ 40 & 36 \end{array}\right| \text{u. } 54\left|\begin{array}{c|c} 60 & 14 \\ 40 & 6 \end{array}\right.\Bigg\}$$

Unterschiede. $\left.\begin{array}{r} 90 \\ -40 \end{array}\right) = 50 \left| \left.\begin{array}{r} 60 \\ -40 \end{array}\right) = 20\right.$; Summe. $50 + 20 = 70.$

Man muß also von A nehmen $\frac{14}{70} = \frac{1}{5}$ ℔, von B $\frac{14}{70} = \frac{1}{5}$ ℔, von C $\frac{36+6}{70} = \frac{42}{70} = \frac{3}{5}$ ℔, um 1 ℔ der Mischung zu haben; oder man nimmt von A 1 ℔, von B 1 ℔, von C 3 ℔; so hat man 5 ℔ der Mischung.

Probe. 5 ℔ der Mischung sind werth $54 . 5 = 270$ kr. Nun ist 1 ℔ von A werth 90, von B 60 und 3 ℔ von C 120 kr. Aber $90 + 60 + 120 = 270$; also diese Summe jener ersten gleich, wie es seyn muß.

Zusatz 3. Man verfährt auf ähnliche Art, wenn 4 Materien so zu mischen sind, daß ein Mittelwerth herauskömmt.

Beyspiel. Man will 4 Sorten Wein, die Maß von A = 84, von B = 60, von C = 36, von D = 30 kr. so mischen, daß man die Maß um 45 kr. geben könne.

Man setze:

$$1)\,45\left|\begin{array}{c|c} 84 & 9) \\ 36 & 39) \end{array}\right. \quad 2)\,45\left|\begin{array}{c|c} 60 & 9) \\ 36 & 15) \end{array}\right. \quad 3)\,45\left|\begin{array}{c|c} 84 & 15) \\ 30 & 39) \end{array}\right. \quad 4)\,45\left|\begin{array}{c|c} 60 & 15 \\ 30 & 15 \end{array}\right.$$

Untersch. $48 + 24 = 72$; Unter. $54 + 30 = 84$.

Summe der Differenzen $72 + 84 = 156$. Indem man nun die der Zahl 84 beygeschriebenen Zahlen 9, 15, eben so die den Zahlen 60, 36, 30 beygeschriebenen Zahlen addirt, und die Summen 24, 24, 54, 54 durch 156 dividirt, findet man, daß man auf 1 Maß der Mischung nehmen müsse von A $\frac{24}{156}$

Maß; eben soviel von B; dann von C sowohl, als von D $\frac{14}{138}$ M. Oder von A sowohl, als B 24, und von C sowohl, als D 54 Maße.

Probe. Die 156 Maße der Mischung kosten 7020 kr.; dieser Summe gleich findet man die Summe der Preise der von den einzelnen Sorten genommenen Maße.

Zusatz 4. Soll aber die Einheit der Mischung einen geringeren Werth oder Preis bekommen, als der ist, welchen eine jede der angegebenen oder zu mischenden Materien hat: so muß man noch eine Materie zur Mischung nehmen, deren Werth $= 0$ gesetzt werden kann.

Beyspiel. 1) Man will einen 24 kr. Wein um 20 kr. geben, ohne Verlust zu haben; oder 2) man will 2 Sorten Wein, wovon die eine Maß 30, die andere 24 kr. kostet, so mischen, daß man das Maß um 20 kr. geben könne. In beyden Fällen fragt sich, wieviel Wasser beygemischt werden müsse. Oder 3) ein Goldarbeiter will 3 Sorten Goldes, nämlich 18kar., 16kar., 14kar. so mischen, daß 10kar. Gold in der Mischung ist: wieviel schlechtes Metall, z. B. Kupfer, dessen Werth gegen Gold $= 0$, muß zugesetzt werden?

Die Rechnungen stehen so:

Für Fall 1. Für Fall 2.

$$20\left|\begin{array}{l|l}24 & 20)\\ 0 & 4\ )\end{array}\right. \qquad 20\left|\begin{array}{l|l}30 & 20)\\ 0 & 10)\end{array}\right. \text{und } 20\left|\begin{array}{l|l}24 & 20\\ 0 & 4\end{array}\right.$$

Differ. $= 24$ Diff. $30 + 24 = 54$.

Für Fall 3.

$$10\left|\begin{array}{l|l}18 & 10)\\ 0 & 8\ )\end{array}\right. \text{und } 10\left|\begin{array}{l|l}16 & 10)\\ 0 & 6\ )\end{array}\right. \text{und } 10\left|\begin{array}{l|l}14 & 10\\ 0 & 4\end{array}\right.$$

Differ. $18 + 16 + 14 = 48$.

Man nimmt also im 1sten Falle 4 Theile Wasser auf 20 Theile Wein, oder $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ Maß Wasser auf $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$ M. Wein. Im zweyten Falle nimmt man $\frac{20}{54} = \frac{10}{27}$ M. vom besseren Weine sowohl, als vom geringeren, und $\frac{14}{54} = \frac{7}{27}$ M. Wasser; oder von jeder Weinsorte 10, und vom Wasser 7 Maße, um 27 M. der Mischung zu haben. Im 3ten Falle nimmt man von jeder Goldsorte z. B. 10 Mark, und 18 Mk. Kupfer zu 28 Mk. Mischung.

§. 174. VII. Wechselrechnung.

Das Wechseln, als bloßer Geldtausch, ist entweder das gemeine Wechseln, wobey man einheimisches Geld gegen ein anderes einheimisches oder gängiges Geld giebt, oder es ist das Hauptwechseln, Wechseln über Land, wenn man ausländisches Geld gegen einheimisches, und umgekehrt, umtauscht.

Bey beyden Wechselarten muß man 1) die Werthe der Geldsorten; 2) das Agio, Aufgeld, wenn ein solches statt findet, genau kennen. Die erste Berechnung geschieht übrigens nach der Kettenregel; die 2te nach der einfachen goldnen Regel.

Beyspiele 1. 2. Wieviel Kronenthaler erhält man für 100 Stück Konventionsthaler, wenn 1 Konventthlr = 2 fl. 24 kr. oder = $2\frac{2}{5}$ fl., und 1 Krone = 2 fl. 42 kr. oder = $2\frac{7}{10}$ fl. ist?

Oder: man hat für 1000 fl. Wiener Währung Waare eingekauft: wieviel macht dieß im rheinländischen Gelde, wenn 1 Wiener fl. = $1\frac{1}{5}$ rheinl. fl. ist?

Rechnungen

für Fall 1.

x Kron.	100 Konv.thlr.	oder	x	100
1 Konv.	$2\frac{2}{5}$ fl.		~~8~~	~~12~~ 4
$2\frac{7}{10}$ fl.	1 Krone		9 ~~27~~	~~10~~ 2

$x = \frac{800}{9} = 88\frac{8}{9}$ Kron.

für Fall 2:

x fl. rhn.	1000 W. fl.
1 W. fl.	$1\frac{1}{5}$ fl. rhn.

$x = \frac{6000}{5} = 1200$ fl. rhn.

Beyspiel 3. Es wünscht Jemand gegen 245 fl. an kleiner Münze z. B. an 3 Kreutzerstücken eine größere Münzsorte z. B. Kronen, oder überhaupt Silbergeld gegen Gold einzuwechseln; da man in diesen Fällen immer ein Agio statt findet, z. B. 3 Procent: so findet man durch die Proportion

100 : 245 = 3 : x, die Größe des Agio, und durch die Proportion

100 : 245 = 97 : x, den Werth der 245 fl. an kleiner Münze, wenn 100 fl. dieser Münze nur 97 fl. in größerer Münzsorte sind.

§. 175. Fortsetzung. Allein das eigentliche Wechselgeschäft besteht ursprünglich darin, daß der Wechsler B auf seinem Platze (oder an seinem Orte) von A baares Geld gegen einen von B an einen dritteren C auf einem auswärtigen Platze ausgestellten Schein oder Brief empfängt, damit eine vierte Person D dieselbe von A baar gezahlte Summe von C empfange. Wenn z. B. ein Vater (A) in Würzburg seinem in Wien studierenden Sohne (D) 1000 fl. zukommen lassen will, so zahlt der Vater, statt das Geld auf den Postwagen zu geben, diese Summe an irgend einen Kaufmann (B) in Würzb.; dieser giebt ihm dafür gegen eine gewisse Vergütung (Spese) einen Brief, ausgestellt auf einen Kaufmann (C) in Wien, welcher dann dem Sohne (D) obige Summe baar auszahlt.

Es kommen also bey diesem Geschäfte 4 Personen vor: 1) A, welcher gegen baar gezahltes Geld eine Anweisung oder einen Brief empfängt, den er wegsendet; diese Person A heißt daher der Remittent; 2) B, welcher den Brief ausstellt, um dem A das Empfangene an einem anderen Platze wieder zu erstatten; diese Person B heißt der Trassent (von trarre, ziehen, Geld gegen einen Wechselbrief erhalten); 3) D, welcher den empfangenen Wechselbrief an dem auswärtigen Orte vorzeigt, um Geld dafür zu erhalten; diese Person D heißt der Präsentant; 4) C, welcher den Brief oder Schein annimmt, und das Geld, worauf der Brief lautet, auszahlt; diese Person C heißt der Acceptant. Der Remittent A nennt seine paar gezahlte Summe Geldes seine Rimeß (rimessa, remise oder Versendung), und der Trassent B nennt dieselbe Summe seine Tratt (tratta, traite, Zug).

Indessen ist zuweilen der Remittent auch zugleich Präsentant, indem er selbst den Wechselbrief auf den auswärtigen Platz mit sich nimmt, und da vorzeigt. Auch ist der Remittent öfters zugleich Trassent, wenn sich an dem auswärtigen Platze, wo er an Jemand Geld zu zahlen hat, ein Schuldner von ihm befindet, auf den daher der Brief ausgestellt wird.

Hiebey ist noch zu bemerken, daß der Trassent in seinem auszustellenden Briefe die dagegen baar empfangene Geldsumme im Currentgeld desjenigen Platzes berechnen und ausdrücken müsse, wo der Brief wieder mit klingender Münze gezahlt werden soll. Dieses Currentgeld (laufende, gangbare Münze) unterscheidet sich nämlich vom Banko- oder Wechselgelde, welches man in den großen Wechselhäusern zu Wien, London ... findet, und gewöhnlich besser ist, als Currentgeld, indem ein ganzer Staat für die Zahlung bürgt. Man nimmt daher von solchen großen Wechselhäusern statt klingender Münze bloßes Papier, oder Banknoten, welche man gegen wirkliches Geld leicht und oft mit Vortheil umsetzen kann, solange jene Häuser noch Zutrauen haben. Eine ähnliche Bewandtniß hat es mit dem Girogelde, wie es in Augsburg statt findet. Kaufleute legen ihr Geld in ein dortiges Bankohaus zur Verwahrung nieder. Wenn nun einer zu zahlen hat: so läßt er seinen Gläubiger als Eigenthümer des dort niedergelegten Geldes einschreiben. Dieser Gläubiger kann dann wieder einem andern seinen Antheil am Wechselhause überlassen u. s. f., so, daß blos durch Ab- und Zuschreiben jenes Geld im Kreise (Giro) umherläuft, und blos damit große Geschäfte gemacht werden; weßwegen auch das Girogeld gewöhnlich um 27 an 100 besser ist, als Currentgeld, oder man für 100 Girothlr. 127 Curentthlr. empfängt.

Der Ausdruck Primawechsel, oder der Beysatz in den Wechselbriefen Prima, Sekunda, Terza bezeichnet blos, daß man aus Vorsicht eine oder 2 Abschriften vom Wechselbriefe genommen habe, und dieselben dem ersten Briefe nachsenden werde. Im nachgesendeten Briefe wird ausdrücklich bemerkt, daß dieser mit dem vorigen nur für einen Brief gelte. Geht aber ein Brief sicher, so stellt man den Solawechsel aus.

§. 176. Fortsetzung. Die Zeit, binnen welcher der Präsentant vom Acceptanten das Geld erheben kann, ist öfters im Wechselbriefe selbst bestimmt angegeben, indem es

da z. B. heißt: nach Sicht (a vista) oder 2, oder 3 Monate nach Sicht oder a Dato, d. i. das Geld sey gleich nach Ansicht des Briefes, oder erst in 2, oder 3 Mon. nach Vorzeigung desselben, oder vom Tage des ausgestellten Wechsels an zu bezahlen. Steht auf dem Briefe a Uso (oder Usance); so muß sich der Inhaber des Wechsels mit Erhebung seines Geldes nach dem auf dem Wechselplatze herkömmlichen Gebrauche richten; z. B. in Basel wird 14 Tage nach Sicht und in Genf 30 T. a Dato gezahlt.

Hiebey sind noch die Respekttage, oder die Zeit zu bemerken, innerhalb welcher der Wechsel entweder anerkannt (honorirt), und der Inhaber desselben sein zu ziehendes Geld abfodern muß, wenn er nicht die gerichtliche Hilfe verlieren will, oder der Wechsel mit Protest zurückgegeben wird. In diesem Falle muß der Briefaussteller alle Kosten zahlen, einen andern sichern Brief ausstellen, oder das empfangene Geld baar zurückezahlen. Dieser Respekttage Zahl ist ebenfalls verschieden. Frankfurt hat gewöhnlich 4, mit Ausschluß der Sonn- und Feyertage, Wien 3.

§. 177. Fortsetzung. Es ist nicht selten der Fall, daß der Inhaber eines Briefes diesen, weil er die Zahlung nicht abwarten kann oder will, wieder an einen andern Kaufmann weggiebt, in welchem Falle er auf die Rückseite des Briefes schreibt, an wen der Wechsel gezahlt werden soll. Dieses Rückenschreiben heißt Indossement, oder Endossement (von dosso oder dos, Rücken). So kann derselbe Brief durch mehrere Hände gehen, bis er gegen klingende Münze gelößt wird. Kaufleute, welche sich mit dem Einkaufe der Wechselbriefe beschäftigen, heißen Bankiers (banquiers). Sie hatten nämlich ehemals auf öffentlichem Markte Bänke, um Geld und Briefe auszuwechseln. Dem Betrüger, oder dem, welcher seine Schulden nicht zahlen konnte, ließ der Richter die Bank zerbrechen; daher das Wort bankerott (von banco und rotto, zerbrochen).

§. 178. Fortsetzung. Wechselkurs, oder schlechthin Kurs wird der Maßstab genannt, nach dem man beym Wechseln auf einen auswärtigen Platz berechnet, wieviel hiesiges (inländisches) Geld die Summe des fremden (ausländischen) Geldes ausmache, oder umgekehrt.

Dieser Maßstab enthält zwey Werthe, oder Valuten, der eine besteht im fremden, der andere im hiesigen Gelde. Eine dieser Valuten ist beständig, oder eine unveränderliche Summe, die andere ist veränderlich, d. i. ihre Summe ist bald mehr, bald weniger. Die letztere ist eigentlich der Kurs zu nennen, indem sie der bald steigende, bald fallende Preis ist, um welchen die beständige Valute verkauft oder gekauft wird. So hat Frankfurt auf Hamburg die veränderliche Valute, weil man in Frankfurt für die unveränderliche Summe von 200 Mark Hamburger Bankogeld bald mehr, bald weniger als $144\frac{7}{8}$ Wechselzahlung giebt. Hamburg aber, welches die unveränderliche Summe von 200 Mark Bankogeld für eine bald größere bald kleinere Summe, als $144\frac{7}{8}$ fl. Augsburger Currentgeld giebt, hat auf Augsburg die unveränderliche Valute.

Um sich zu erklären, daß man bald mehr bald weniger für eine beständige Valute biete, dient Folgendes: Gleichwie man beym Einwechseln des Goldes bald ein höheres, bald geringeres Agio geben muß, je nachdem das Gold entweder mehr oder weniger gesucht, und seltner zu haben ist; eben so natürlich ist es, daß der Preis der Wechselbriefe veränderlich seyn müsse. Man setze z. B. Schuldner in Frankfurt haben eine noch einmal so große Summe Geldes an Handelshäuser in Wien zu senden, als Wiener Kaufleute nach Frankfurt senden müssen: so sieht man sogleich, daß die Briefaussteller zu Frankfurt diesen Umstand benutzen, und versprechen werden, für den Frankfurter Schuldner gegen Erlegung von 70 oder 73 Rthlr. 100 Rthlr. Wiener Courant zu bezahlen, statt daß sie sich im umgekehrten Falle nur 64 oder 68 Rthlr. hätten bezahlen lassen. Im ersten Falle sagt man: die Wechselbriefe auf Wien sind selten in Frank-

furt, oder der Wechselpreis nach Wien ist hoch. Im zweyten Falle, wo für mehrere Kaufleute in Frankfurt eine größere Summe Geldes in Wien liegt, als für Wiener Kaufleute in Frankfurt, folglich mehrere Kaufleute froh sind, wenn sie ihr Geld, statt es sich von Wien mit dem Postwagen senden zu lassen, durch auf Wien gegen baar erhaltene Zahlung ausgestellte Wechselbriefe, in Empfang nehmen, sagt man: die Wechselbriefe auf Wien sind häufig in Frankfurt, oder der Wechselpreis nach Wien ist niedrig.

Leute, welche bey den Kaufleuten einer Stadt umherlaufen, um zu erfahren, ob Wechselbriefe auf eine andere Stadt vorräthig seyen, heißen Courtiers (Läufer), sonst auch Sensale oder Mäkler. Ihre Belohnung, welche sowohl der Käufer, als Verkäufer zahlt, ist 1 vom 1000, und heißt Courtage, oder Senzaria. Diese Sensale schreiben denn auch den Wechselkurs so auf, wie sie ihn finden, oder sie fertigen die Kurs- oder Wechselpreis-Zettel, welche auswärtigen Kaufleuten mitgetheilt werden.

§. 179. Fortsetzung. Die wirklichen Rechnungen beym Wechselgeschäfte werden gewöhnlich nach der einfachen goldnen Regel, oder vermittels der Kettenregel auf die leichteste Weise angestellt, sobald nämlich der Kurs überhaupt z. B. aus dem berühmten Taschenbuche von Nelkenbrecher (11te Auflage 1810.), ferner der für eine gewisse Zeit statt findende Kurs aus den Kurszetteln bekannt, oder gegeben ist, und endlich sobald man z. B. aus demselben Taschenbuche den Werth sowohl des Rechnungsgeldes, als des Currentgeldes und das Verhältniß beyder zueinander kennt.

Beyspiel 1. Es remittirt oder sendet Jemand durch einen Wechselbrief 400 ℔ Sterling von London nach Amsterdam, 1 ℔ Sterl. zu 32 ßl. vls. Bankogeld; wieviel Currentgulden empfängt er dafür in Amsterdam, wo das Agio oder der Aufwechsel 5 von 100 ist?

Hier bedeutet ßl. vls. Schilling Vlaems, oder Flämmisch (flandrisch). Nämlich 1 Holländ. fl., welcher im gewöhnlichen Gebrauche = 20 Stüber, = 320 Pfenning, ist 40 Pfenning vls. oder $3\frac{1}{3}$ ßl. vls. Ferner sagt der Aufwechsel 5 von 100 soviel, als 100 Bko.gulden sind 105 gemeine Gulden.

Man setzt nun:

1 ℔ Sterl. : 400 = 32 ßl. vls. : x, oder 400 ℔ Sterl. machen 12800 ßl. vls. Diese Zahl durch $3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ dividirt, giebt den Quotienten 3840, d. i. jene 400 ℔ Sterl. sind soviel Bankogulden. Setzt man nun vollends:

100 fl. bko. : 3840 = 105 fl. Kurrentgeld : x, so hat man durch die aufgefundene Zahl 4032 die Frage beantwortet. Mit Hilfe der Kettenregel findet man diese Zahl viel schneller, indem man setzt:

x holl. fl. Kurrentgeld	400 ℔ Sterl.	oder	x	4
1 ℔ Sterl.	32 ßl. vls. bko.		10	3
$3\frac{1}{3}$ ßl. vls. bko.	1 fl. bko.			32
100 fl. bko.	105 fl. kurrent.			105
			10	40320

also x = 4032.

Beyspiel 2. Ein Kaufmann zu Frankfurt remittirt oder sendet durch einen Wechsel nach London 273 Pfund Sterling 14 Schilling, 3 Pfenn. Sterl. $133\frac{1}{2}$ Batzen Frankfurter Münze für 1 ℔ Sterl. Wieviel Reichsthaler zu $22\frac{1}{2}$ Batz. müssen dafür dem Trassenten oder Schreiber des Wechselbriefes in Frankf. Münze gezahlt werden?

Da 1 ℔ Sterl. = 20 Schilling; 1 Schill. = 12 Pfen. Sterl.; so bekömmt man statt der 273 ℔ Sterl. rc., die gleiche Summe 65691 Pfenn. Sterl. durch Resolvirung.

Man setze nun:

x Rthlr.	65691 Pfenn. Sterl.	oder	x	65691
240 Pf. St.	$133\frac{1}{2}$ Batz.		240	267
$22\frac{1}{2}$ Batz.	1 Rthlr.		2	
			45	2
			10800	17539497.

Also x = $1624\frac{297}{10800}$ Rthlr. frankf. M.

Man kann wieder die Probe durch Umkehrung der Aufgabe nach folgendem Ansatze machen:

x Pfund Sterl.	$1624\frac{297}{10800}$ Rthlr.	oder	x	17539497
1 Rthlr.	$22\frac{1}{2}$ Batz.		10800	45
$133\frac{1}{2}$ Batz.	1 ℔ Sterl.		240	
			2	
			267	2
			64080	17539497

Demnach x = $273\frac{45657}{64080}$ ℔ Sterl. = 273 ℔ Sterl. + $14\frac{1602}{6408}$ Schilling = 273 ℔ St. + 14 Schil. + 3 Pfenn. Sterl., wie oben.

§. 180. Fortsetzung. Für den Fall, wo man von einem Platze aus auf einen anderen Platz gerne Geld durch Wechsel senden möchte, und ein Mittelplatz zu diesem Ende gewählt werden muß, weil jener erste Platz mit dem zweyten nicht unmittelbar wechselt, dient das

Beyspiel 1. Ein Kaufmann in Frankfurt hat 600 Rubel nach Reval (in Rußland), wohin jenes nicht wechselt, zu zahlen; er kauft also einen Amsterdamer (auf Amsterdam ausgestellten) Brief, indem er 140 Rthlr. frankf. Kurrentgeld für 100 Thlr. holl. kur. giebt; — ein Freund in Amsterdam giebt ihm dann für jenen gesendeten Wechsel einen anderen auf Reval zu 110 Kopeken, oder zu $1\frac{1}{10}$ Rubel für 1 Amsterd. Kurrentthlr.; wieviel muß der Kaufmann in Frankf. für jene 600 Rubel zahlen, die Spesen oder Unkosten nicht mit eingerechnet?

Man setze:

x Rthlr. frankf. kur.	600 Rubel	x	6
$1\frac{1}{10}$ Rubel	1 Thlr. holl. kur. oder	11	10
100 Thlr. holl. kur.	140 Rthlr. fr. kur.		140
		11	8400

also x = $763\frac{7}{11}$ Rthlr. frankf. kur.

Wird etwas für Belohnung (Provision), oder für Unkosten (Spesen) bezahlt, z. B. 1, oder $1\frac{1}{2}$, oder 2 von 100: so ist wohl zu bemerken, daß man für den Fall, wenn eine Stadt das Geld, das berechnet werden soll, zu empfangen hat, setzt: 100 werden 99, oder $98\frac{1}{2}$, . .; aber für den Fall, wo die Sadt das Geld zahlen muß, setzt: 100 werden oder sind 101, 102 . . .

Beyspiel 2. Ein Kaufmann zu Hamburg läßt durch seinen Freund in Leipzig die hier schuldig gewordene Summe von 1000 Louisd'or à 5 Rthlr. kur. auszahlen: wieviel Hamburger Rthlr. bko. darf dieser anrechnen, wenn der Kurs 140 Rthlr. kur. ist (oder für 100 Hamb. Rthlr. bko. 140 Rthlr. kur. gegeben werden), und in Leipzig 1 von 100 für Unkosten gerechnet wird?

Man setze nach der Kettenregel:

x Rthlr. bko.	1000 L.d'or
1 L.d'or	5 Rthlr. kur.
100 Rthlr. kur.	101 Rthlr. kur.
140 Rthlr. kur.	100 Rthlr. bko.

wodurch man x = $736\frac{7}{11}$ Hamb. Rthlr. bko. findet.

§. 181. Fortsetzung. Wenn ein Bankier bey seinem Geschäfte gewinnen will: so muß er den jedesmaligen Kurs auf verschiedenen Plätzen schnell zu erfahren suchen. Er kann dann, wenn er es vortheilhaft findet, remittiren, wenn er auch nichts zu zahlen schuldig ist, um mehr Geld dagegen zu erhalten, oder auch trassiren, d. i. auf Leute durch Wechsel Geld ziehen, wenn sie ihm gleich nichts schuldig sind, und welchen er auf eine andere Art wieder zu ihrem Gelde verhilft.

Beyspiel 1. Basel (oder ein Kaufmann in Basel) remittirt oder sendet durch einen Wechsel auf Amsterdam den Werth von 2000 Schweitzer Livres zu 30 Sous oder $1\frac{1}{2}$ Liv. für 1 fl. holl. kur. mit Befehl, das erhaltene Geld auf London zu remittiren. Dieß thut Amsterdam zu 36 ßl. vls. bko. (sieh Beysp. 1. §. 179.) für 1 Pfund Sterl. (wobey angenommen wird, daß Bko. geld um 5 Proc. besser, als Kurrentgeld sey). London remittirt auf erhaltenem Befehle den Belauf nach Hamburg zu 32 ßl. vls. bko., aber 4 Hamb. Rthlr. bko. sind für 1 Pf. Sterl. Nun wird Hamburg zugleich ersucht, das erhaltene Geld auf Augsburg zu übermachen zu 140 Rthlr. Augsb. kur. für 100 Rthlr. Hamb. bko. Endlich trassirt oder zieht Basel selbst auf Augsburg zu 175 Schweitzer Liv. für 100 fl. kur., oder für $66\frac{2}{3}$ Rthlr. Augsb. kur. Nun ist die Frage, wieviel Basel für jene 2000 remittirte Schw. Liv. wieder beziehe, ohne die Unkosten zu rechnen?

Man setze wieder:

x Schw. Liv.	2000 Schw. Liv.		x	2000 10
$1\frac{1}{2}$ Liv.	1 fl. holl. kur.		3	2
1 fl. holl. kur.	$3\frac{1}{3}$ ßl. vls. kur.		3	10
105 ßl. vls. kur	100 ßl. vls. bko.	od. 321	105	100
36 ßl. vls. bko.	1 Pfund Sterl.		9 36	4
1 Pf. St.	4 Rthlr. Hamb. bko.		100	140 28 4
100 Rthr. Ham. kur.	140 Rthr. Ham. kur.		200	3
$66\frac{2}{3}$ Rthr Ham. kur.	175 Schw. Liv.			75
			81	140000;

also $x = 1728\frac{32}{81}$ Schw. Liv. Der Bankier würde also bey diesem Geschäfte $271\frac{49}{81}$ Schw. Liv. Schaden haben.

Wenn die ganze Summe, mit welcher der Bankier einkauft, nicht genannt ist: so fragt man, wieviel auf 100 gewonnen oder verloren werde.

Beyspiel 2. Leipzig kauft Breslauer Briefe zu 95 Leipz. Thlr. für 100 Breslauer, läßt sie in Hamburg verhandeln zu 140 Bresl. Thlr. für 100 Hamb. Thlr. bko. Diese Briefe sendet Leipzig nach Wien, und läßt sich das Geld zurückeschicken zu 103 Wiener Thlr. für 100 Leipziger Thlr. Wenn nun hiebey 1 von 100 für Spesen zu berechnen sind: wieviel an 100 wird Leipzig gewinnen oder verlieren?

Man setze nach der Kettenregel:

x Leipz. Rthlr.	100 Leipz. Rthlr.	)		x	100
95 L. Rthlr.	100 Bresl.	)		19 95	100
140 Bresl. Rthlr.	100 Hamb. Rth bk.	)	oder	7 140	100 5
100 Hamb. Rth. b.	142 Wien. Rthlr.	)		100	142
103 W. Rthlr.	100 Leipz. Thlr.	)		103	100
100 L. Thlr.	99 L. Thlr.	)		100	99
				13699	1405880.

Also $x = 102\frac{8502}{13699}$ Leipz. Thlr., mithin $2\frac{1}{2}$ Thlr. beynahe Gewinn.

§. 182. Fortsetzung. Parirechnung. Wenn man unter dieser Rechnung das Bestimmen des Werthes der Wechselmünzen oder Wechselarten zwischen 2 Wechselplätzen versteht: so pflegt man zu berechnen, wieviel Geld man auf dem einen Wechselplatze geben, und an dem anderen Platze empfangen sollte, wenn man Geld gegen Geld in Silber gleich aufwägen könnte. Man nennt dieses das Bestimmen des Werthes der Wechselmünzen nach dem Silberpari. Aus diesem Pari erkennt man, ob der Kurs zum Nutzen oder Schaden, d. h. mehr oder weniger ist, als er nach dem Pari seyn sollte. Wenn man z. B. sagt: Frankfurt wechselt und giebt auf Amsterdam 140 Rthlr. kur. für 100 Thlr. holl. bko.; so sind jene 140 Thlr. das Pari mit diesen 100 Thlrn. Giebt daher Frankfurt für die letzte nur 137 Thlr. kur.; so ist der Kurs auf Amsterd. gefallen. Solche Pari-Bestimmungszahlen findet man durchaus im oben erwähnten Nelkenbr. Ta-

schenbuche, wo die veränderlichen Zahlen, wie 140, mit einem Sternchen bezeichnet sind.

Man kann aber auch unter Parirechnung das Bestimmen des Wechselpreises zwischen mehreren Städten verstehen, um zu erfahren, auf welchen Platz man am nützlichsten wechseln könne.

Beyspiel 1. Der Wechsellauf von Frankfurt nach Hamburg stehe zu 148 (d. i. zu 148 Rthlr. frankf. kur. für 100 Rthlr. Hamb. bko.), und der Kurs von Hamb. nach Amsterdam zu 106 (d. i. 106 Rthlr. holl. kur. für 100 Rthlr. Hamb. bko.) welches ist der Wechselpreis oder das Pari zwischen Frankf. und Amsterd.?

Der Angabe gemäß sind die 148 Rthlr. Frankf. kur. = 106 Rthlr. holl. kur. Nun wechselt Frankfurt unmittelbar auf Amsterdam, und giebt 138 Rthlr. kur. mehr oder weniger für 100 Thlr. holl. kur. Man setze also: wenn 106 Rthr. holl. kur. sind 148 Thlr. Frankf. kur., was sind 100 Thlr. holl. kur.? Oder

$$106 : 100 = 148 : x, \text{ wo } x = 139\tfrac{33}{53}$$

gefunden wird. Soviel Rthlr. frankf. kur. sind also hier das Pari. Man kann also entweder zu diesem Wechselpreise geradezu von Frankfurt nach Amsterdam wechseln, oder über Hamburg nach Amsterdam zu den oben angezeigten Kursen.

Beyspiel 2. Wenn der Kurs von Augsburg nach Amsterdam zu 110 Girothlr. ist für 100 Amsterd. Thlr. bko. (jeden zu 50 Stüber), und von Hamb. nach Amsterd. zu 33 Stüber bko. holl. für 1 Hamb. Girothlr. von 2 Mark Lüb., oder für $\frac{2}{3}$ Hamb. Rthlr. bko.: wie hoch steht der Kurs von Hamb. nach Augsb., oder wieviel Thlr. Augsb. kur., deren 127 für 100 Girothlr. gelten, bekömmt man für 100 Hamb. Rthlr. bko.?

Man setze:

x Rthlr. Augsb. kur.	100 Hamb. Rthlr. bko.
$\frac{2}{3}$ Hamb. Rthlr. bko.	33 Stüb. holl.
5000 Stbr. holl.	110 Girothlr.
100 Girothlr.	127 Rthlr. Hamb. kur.

oder

	x	1~~0~~0
	~~2~~	3
1000	5~~0~~00	33
		1~~1~~0 ~~22~~ 11
	1~~0~~0	127
	1000	198303;

also $x = 198\frac{303}{1000}$ Augsb. kur. Rthlr.

Anmerkung 1. Man kann das Pari des Wechselkurses auch aus dem bekannten Preise einer Münze an 2 Orten suchen. Wenn z. B. die neue Louisd'or in frankf. Wechselzahlung 6 Rthlr. 12 kr., in Paris 24 alte Livres galt: was war das Pari zwischen beyden Städten, oder wieviel Rthlr. bekam man in Frankf. für 100 französische Thlr. oder 300 Liv. in Paris?

Man schließe: 24 Liv. sind $6\frac{12}{90}$ Rthlr., was 300? so findet man $76\frac{2}{3}$ Rthlr.

Und umgekehrt; kennt man den Kurs für 2 Plätze, und den Preis einer Münze an dem einen Platze: so kann man auch den parimäßigen Preis für den anderen Platz finden. Z. B. die alte Duplone gelte in Amsterdam 9 fl. 9 fl. 2 Stbr. oder $9\frac{2}{20}$ fl. kur. Der Bankoaufwechsel sey 5 auf 100, und der Kurs von Amsterdam nach London sey 36 ßl. vls. bko. (deren $3\frac{1}{3}$ auf 1 fl. bko. gehen) für 1 ₤ Sterl. (oder 20 Schill. Sternl.): was ist der Werth jener Münze in London?

Man setze:

x Schill. Sterl.	1 alte Dupl.
1 alte Dupl.	$9\frac{1}{10}$ fl. holl kur.
105 fl. holl. kur.	100 fl. bko.
1 fl. holl. bko.	$3\frac{1}{3}$ ßl. vls. bko.
36 ßl. vls. bko.	20 Schill. Sterl.

oder

	x	91
	1~~0~~	1~~0~~0 20
21	1~~0~~5	1~~0~~
	3	
9	36	20 5
	9.3.21	91.20.5

woraus man $x = \frac{9100}{567} = 16\frac{28}{567} = 16\frac{4}{81}$ Schill. Sterl. als Preis für jene Münze in London findet.

Anmerkung 2. Die sogenannte Arbitrage, Wechselwahlrechnung, wodurch man unter mehreren Wechselpreisen den vortheilhaftesten erfahren will, ist von der Parirechnung nicht wesentlich verschieden. Der Arbitrage bedienen sich 1) Handelsleute, welche Geldversendungen zu machen haben, und demnach fragen, wie dieses am besten geschehen könne, indem sie entweder geraden Wegs (addritura) remittiren, d, i. das Geld auf den Platz, wo sie Schuldner sind, durch einen Wechsel senden; oder indem sie hiezu einen tauglichen Zwischenplatz vermöge der Parirechnung wählen. Z. B. ein Kaufmann zu Frankfurt hat für gekaufte Waaren 2000 Rthlr. holl. kur. nach Amsterdam zu senden, wohin ihm Wechsel zu $139\frac{2}{3}$ angeboten werden. Würde er nun nach §. 182. Beysp. 1. die Parirechnung anstellen, indem er sein Geld über Hamburg nach Amsterdam zu senden gedächte: so würde er finden, daß es an und für sich gleich gelte, ob er das Geld geraden Weges, oder über Hamburg sende; abgesehen davon, daß er im letzteren Falle etwas für Spesen zahlen müßte, und daß die Wechsel auf gleiche Zeit nach Sicht gestellt würden.

2) Bedienen sich der Arbitrage die Kommissionäre, deren Hauptgeschäft ist, Wechselaufträge zu besorgen, wie wir bey der folgenden Rechnung sehen werden. Die Kommissionäre sind nämlich verantwortlich dafür, daß sie unter mehreren Wegen, auf welchen sie den Auftrag besorgen können, den für den Kommittenten vortheilhaftesten auswählen.

§. 183. VIII. Wechselkommissionsrechnung. Wer den Auftrag giebt, heißt Kommittent; wer den Auftrag für Rechnung des Kommittenten besorgt, heißt Kommissionär. Das, was dieser nebst den gewöhnlichen Spesen vergütet erhält, heißt Provision. Das Wechseln,

wobey gar nichts vergütet wird, heißt das Nettowechseln. Der dem Kommissionär vom Kommittenten vorgeschriebene Kurs heißt limitirter Kurs.

Rücksichtlich des Standes der Kurse (vergl. §. 178.) ist hier zu bemerken: wenn der Ort, wo der Wechsel geschlossen (d. h. wo der Wechselbrief verkauft und gekauft) wird, die veränderliche Valute hat: so ist ein niedriger Kurs dem Verkäufer des Wechselbriefes (Trassenten) schädlich; denn dieser erhält dann für das fremde Geld, das er verkauft, nicht mehr gleichviel einheimisches Geld: ihm ist also ein hoher Kurs nützlich. Hingegen demjenigen, welcher den Wechselbrief kauft und übermacht, dem Remittenten, ist ein niedriger Kurs nützlich, indem er für das fremde gekaufte Geld weniger einheimisches Geld bezahlt, als er bey einem höheren Kurse zahlen müßte.

Das Gesagte verhält sich umgekehrt, wenn der Ort, wo der Wechsel geschlossen wird, die unveränderliche Valute hat.

§. 184. Fortsetzung. Man findet leicht alle Hauptfälle der Wechselkommissionsrechnung, wenn man den Gegenstand unter folgenden Gesichtspunkten betrachtet:

Erstens. Es wird entweder ausdrücklich keine Vergütung der Mühe bedungen, und man hat

I. den Fall des Nettowechsels, wobey die Frage zu beantworten ist: welchen Kurs muß der Kommissionär wählen, um etwas Bestimmtes für seine Mühe zu haben?

Oder es findet diese Bedingung nicht ausdrücklich statt. In diesem Falle werden bey jeder anderen Uebereinkunft die herkömmlichen Spesen, so wie die Provision z. B. $\frac{1}{2}$ Prozent vergütet.

Zweytens. Der Wechselgegenstand hinsichtlich einer und derselben Summe kann entweder ein Remittiren und Trassiren zugleich (oder auch umgekehrt), oder ein bloses Remittiren oder Trassiren betreffen.

Und zwar beydes entweder mit vorgeschriebenen, völlig limitirten Kursen, oder nur überhaupt, oder zum Theile limitirten Kursen. Nach diesem Gesichtspunkte bekömmt man weiter folgende Fälle:

II. Ein Kommissionär soll eine gewisse Summe zu einem bestimmten Kurse nach einen genannten auswärtigen Platz remittiren, und den Belauf solcher Summe auf einen anderen auswärtigen Platz zugleich wieder trassiren, oder auch umgekehrt, wie muß der Kommissionär den Auftrag vollziehen, wenn sich der Kurs auf einen dieser Plätze zum Nachtheile des Kommittenten geändert hat?

III. Wie muß der Kommissionär verfahren, wenn sich beyde Kurse auf beyden Plätzen, der eine zum Nachtheile, der andere zum Vortheile des Kommittenten, geändert haben?

In jenem Falle muß die Frage durch Rechnung entschieden werden, wieviel muß der Kurs auf dem anderen Platze seyn, wenn der Kommissionär seinen Auftrag ohne Schaden des Kommittenten erfüllen soll? In diesem Falle fragt sichs: kann der Auftrag ohne Nachtheil des Kommittenten vollzogen werden?

IV. Ein Kommissionär soll eine gewisse Summe auf einen benannten auswärtigen Platz trassiren, und den Belauf derselben auf einen anderen benannten auswärtigen Platz wieder remittiren (oder auch umgekehrt). Er soll aber dieß alles durch die Wahl zweckmäßiger Kurse von seinem Platze auf die beyden auswärtigen Plätze so bewirken, daß dadurch der Kurs zwischen den beyden auswärtigen Plätzen ein Bestimmtes betrage. Nun findet der Kommissionär auf seinem Platze den Kurs auf einen auswärtigen Platz ein Gewisses. Wieviel muß also auch der Kurs auf den anderen auswärtigen Platz seyn, wenn der Auftrag nach des Kommittenten Wunsch vollzogen werden soll?

V. Ein Kommissionär soll denselben Auftrag wie unter IV. haben. Nun findet er aber beyde Kurse von seinem Platze auf beyde auswärtigen Plätze ein Gewisses: kann er den Auftrag vollziehen?

VI. Ein Kommissionär soll den Betrag einer gewissen Summe Geldes seines Ortes auf einen oder den anderen benannten Platz zu einem limitirten Kurse lediglich trassiren, oder auch umgekehrt lediglich remittiren. Wenn sich aber die Kurse auf beyde Plätze geändert haben: so soll der Kommissionär denjenigen genannten Platz wählen, dessen Kurs am nützlichsten, oder doch am wenigsten schädlich ist. Hier entsteht die Frage: welchen der genannten Plätze hat der Kommissionär zu wählen?

Drittens. Der Wechselgegenstand können zwey oder mehrere Wechselsummen, oder Wechselbriefe zugleich seyn. Dadurch ergeben sich noch folgende zwey Fälle:

VII. Ein Kommissionär hat ein Paar auf verschiedene auswärtigen Plätze ausgestellte Wechselbriefe mit dem Auftrage erhalten, dieselbe an seinem Orte zu bestimmten Kursen zu verhandeln. Nun hat sich aber mittlerweile der eine Kurs zum Nachtheile des Kommittenten verändert; —

VIII. oder beyde Kurse haben sich geändert, der eine zum Nachtheile, der andere zum Vortheile.

Im ersten Falle entsteht die Frage: zu welchem Kurse muß der andere Brief verkauft werden, um doch den Auftrag nach des Kommittenten Willen zu vollziehen?

Im zweyten Falle muß man die Frage beantworten: kann bey beyden veränderten Kursen der Auftrag ohne des Kommittenten Schaden vollzogen werden?

§. 185. Rechnungsbeyspiele über die genannten Hauptfälle.

Beyspiel zum I. Hauptfall.

Frankfurt (oder ein Kaufmann zu Frankfurt, als Kommissionär) soll zu 75 netto auf Paris trassiren. Wenn nun Frankfurt ½ Prozent für seine Spesen und Provision haben will, zu welchem Kurse darf es dann den Wechselbrief weggeben?

Man schließt: wenn ich $\frac{1}{2}$ auf 100 nehmen will, wieviel muß ich auf 75 nehmen? Man setzt also $100 : 75 = \frac{1}{2} : x$, woraus man $x = \frac{75}{200} = \frac{3}{8}$ findet. Der Wechselbrief darf also zu dem Kurse $75\frac{3}{8}$ weggegeben werden.

Gesetzt, jener Wechselbrief betrage die Summe von 1600 Liv. Tourn.: so würde Frankfurt, welches für beständige 200 Liv. Tourn. bald mehr, bald weniger zahlt, als $76\frac{1}{2}$ fl., nach dem Kettensatze so rechnen:

x fl.	1600 Liv. Tourn.
200 Liv. T.	75 fl.
75 fl.	$75\frac{3}{8}$ fl.

daher $x = \frac{1600 \cdot 603}{8 \cdot 200} = 603$ fl.

und

x fl.	1600 Liv. T.
200 L.	75 fl.

$x = 600$ fl.

Dadurch erfährt also Frankfurt, daß es seinem Kommittenten 600 fl. verrechnen müsse, dagegen aber 603 fl., also für Provision und Spesen 3 fl. Einnahme habe.

Beyspiel zum II. Hauptfall.

Frankfurt soll eine gewisse Summe zu $72\frac{1}{8}$ als Kommissionär nach Paris remittiren, und den Belauf derselben zu $144\frac{1}{4}$ auf London wieder trassiren. Der Kurs in Frankfurt ist aber bereits auf $72\frac{3}{8}$ gestiegen. Wenn nun Frankfurt doch den Auftrag ohne Nachtheil des Kommittenten besorgen will, zu welchem Kurse muß es dann auf London trassiren?

Diese Frage ist ganz einfach zu beantworten; man schließe: wenn $72\frac{1}{8}$ um $\frac{2}{8}$ gestiegen sind, um wieviel würden $144\frac{1}{4}$ steigen? Oder man hat die Proportion:

$$72\tfrac{1}{8} : 144\tfrac{1}{4} = \tfrac{2}{8} : x$$

oder

$$\tfrac{577}{8} : \tfrac{577}{4} = \tfrac{2}{8} : x$$

oder $4 : 8 = \frac{2}{8} : x$ nach §. 148. Zusatz. Demnach $x = \frac{2}{4}$. Trassirt daher der Kommissionär zu $144\frac{3}{4}$ auf London: so wird nichts für den Kommittenten verloren, nichts gewonnen.

Setzt man nun, jene fragliche Summe seyen 1600 Liv. Tourn.: so würde Frankfurt 1) durch die Proportion 200 : 1600 = $72\frac{3}{8}$: x finden, daß es für jene Summe 579 fl. Wechselzahlung geben müsse. Nun giebt Frankfurt für 15 Pfund Sterl. per London $141\frac{1}{8}$ fl. Wechselzahlung, bald mehr, bald weniger: folglich muß Frankfurt 2) berechnen, wieviel Pf. Sterl. auf London dem obigen veränderten Kurse gemäß Frankfurt verkaufen müsse, um die obige 579 fl. W.zahl. wieder in einer gleichen Summe fl. W.zahl. einzunehmen? Man schließt: wenn man 15 Pf. Sterl. verkauft um $144\frac{3}{4}$ fl. W.zahl., wieviel erhält man für 579 fl. W.zahl.? Oder setzt $144\frac{3}{4}$: 579 = 15 : x; wo x = 60 Pf. Sterling gefunden wird.

Anmerkung. Die Frage rücksichtlich des III. Hauptfalles wird auf dieselbe Weise, wie die Frage bey Fall II. entschieden.

Beyspiel zum IV. Hauptfall.

Ein Freund in London hat an Paris 6400 Liv. Tourn. zu fodern, und möchte den Betrag gerne so einziehen, und auf Paris trassiren, daß er für jede 3 Liv. Ts. gerade $29\frac{1}{4}$ Pfenn. Sterl. (pences sterling) erhielte. Aber der Pariser Kurs ist dermals niedriger, als $29\frac{1}{4}$. Es kann daher der Freund nicht ohne Nachtheil geradezu von L. auf Par. trassiren. Er beauftragt daher Frankfurt, für ihn die 6400 Liv. Ts. auf Par. zu trassiren, und ihm den Belauf nach L. zu übermachen, und zwar soll Frankf. die Sache so ausführen, daß für jede 3 Liv. Ts. gerade $29\frac{1}{4}$ penc. sterl. erhalten werden.

Man setze nun, Frankf. finde auf seinem Platze den Kurs zur Rimesse nach London $139\frac{1}{2}$. Zu welchem Kurse muß es demnach auf Paris trassiren, wenn der Auftrag nach dem Willen des Kommittenten vollzogen werden soll?

Da Frankfurt $76\frac{1}{2}$ fl. Wechselzahl. (bald mehr, bald weniger) für beständige 200 Liv. Ts per Paris, und ebenso $140\frac{1}{2}$ fl. für beständige 15 Pfund Sterl. per London giebt: so hat man hier blos die Frage zu entscheiden: was muß der Kurs per Paris seyn, wenn Frankfurt den Auftrag ausführen will?

Man findet die Antwort am kürzesten mit Hilfe der Kettenregel, nach welcher man berechnet, 1) wieviel Pfund Sterl. die 6400 Liv. Ts. betragen, wenn 3 Liv. T. = $29\frac{1}{4}$ penc. sterl. seyn müssen; 2) wieviel Pfund Sterl Frankfurt für den Betrag der auf Paris zu trassirenden Summe, wenn es für den Kurs x verkauft, dagegen zu dem Kurse $139\frac{1}{2}$ wieder einkaufen, und nach London übermachen könne.

1.

x Pfund Sterl. in Lond.	6400 Liv. Ts. per Paris
3 L. T. p. Par.	$29\frac{1}{4}$ penc. sterl. in Lond.
240 penc. st. in L.	1 Pf. Sterl. (nach §. 179. B. 2.)
Man findet x =	260 Pfund Sterl. in London.

2.

y Pfund Sterl. Einkauf	6400 Liv. Ts. Verkauf
200 L. T. Verkauf	x fl. Einnahm
1 fl. Einn.	1 fl. Ausgab
$139\frac{1}{2}$ fl. Ausgab	15 Pf. Sterl. Einkauf.
Man findet y =	$\frac{320\,x}{93}$ Pfund Sterl. Einkauf.

Da nun die vorhin gefundene Summe von 260 Pf. Sterl. dieser Summe y gleich seyn soll, oder da 260 Pf. Sterl. = $\frac{320.x}{93}$ Pf. Sterl. ist: so entwickelt man hieraus, wenn man alles mit 93 multiplizirt, $260.93 = 320.x$, und dividirt man dann alles durch 320, indem man setzt $\frac{260.93}{320} = \frac{320.x}{320}$ und 320 im letzten Ansatze wegläßt: so bekömmt man $75\frac{9}{16} = x$; d. i. um obigen Auftrag nach Wunsch zu vollziehen, muß man zu dem Kurse $x = 75\frac{9}{16}$ auf Paris trassiren.

Beyspiel zum V. Hauptfall.

Frankfurt (als Kommissionär) soll 6400 Liv. Ts., welche ein Londner Freund an Paris zu fodern hat, auf Paris trassiren, und den Betrag nach London remittiren, und zwar so, daß dadurch der Kurs zwischen London und Paris, wie vorhin, $29\frac{1}{4}$ betrage. Nun findet Frankfurt auf seinem Platze den Kurs zur Tratte auf Paris $75\frac{9}{16}$, und den zur Rimesse nach London $139\frac{1}{2}$. Kann bey diesen Kursen der Wille des Kommittenten erfüllt werden?

Frankfurt berechnet hier wieder, 1) wieviel Pf. Sterl. jene 6400 Liv. Ts. nach dem Willen des Kommittenten betragen sollen; nämlich, wie oben, 260 Pf. Sterl.; 2) wieviel Pf. Sterl. Frankfurt, wenn es die Summe 6400 Liv. Ts. zu dem Kurse $75\frac{9}{16}$ verkauft, dagegen wieder zu dem Kurse $139\frac{1}{2}$ einkaufen und nach London übermachen könne. Diese Rechnung steht gemäß der Kettenregel so:

x Pfund Sterl. Einkauf	6400 Liv. Ts. Verkauf
200 L. T. Verk.	$75\frac{9}{16}$ fl. Wechselzahl.
1 fl. W.zahl. Einnahm.	1 fl. Wechselzahl. Ausgab
$139\frac{1}{2}$ fl. W.zahl. Ausgab	15 Pf. St. Einkauf.
Man findet hieraus x =	260 Pf. Sterl.

Da dieß dieselbe Summe ist, wie nach der Rechnung unter 1): so kann allerdings der Auftrag vollzogen werden, ohne Nutzen und Schaden für den Kommittenten. Ersterer wäre erfolgt, wenn man eine größere, letzterer, wenn man eine kleinere Summe, als 260 Pfund St., gefunden hätte.

Beyspiel zum VI. Hauptfall.

Frankfurt (als Kommissionär) soll den Betrag einer gewissen Summe fl. Wechselzahlung entweder zu $74\frac{1}{8}$ auf Paris, od. zu $148\frac{1}{4}$ auf Hamb. trassiren. Nun sollen sich aber beyde Kurse zum Nutzen geändert haben, nämlich es soll der Kurs auf Paris gegenwärtig $74\frac{3}{8}$, der Kurs auf Ham-

burg $148\frac{3}{4}$ seyn; auf welchen von beyden Plätzen kann die Tratte am vortheilhaftesten geschehen?

Die Differenzen zwischen $74\frac{1}{8}$ und $74\frac{3}{8}$, und zwischen $148\frac{1}{4}$ und $148\frac{3}{4}$ sind $\frac{2}{8}$ und $\frac{2}{4}$, oder $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$. Da nun dasselbe Verhältniß zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$, wie zwischen $74\frac{3}{8}$ und $148\frac{3}{4}$ herrscht; indem $\frac{1}{2}$ eben so das Doppelte von $\frac{1}{4}$ ist, wie $148\frac{3}{8}$ oder $148\frac{1}{4}$ das Doppelte von $74\frac{3}{8}$ oder von $74\frac{1}{8}$ ist: so folgt, daß man auf den einen, wie auf den anderen Platz gleich vortheilhaft trassiren könne.

Allein der limitirte Kurs nach Hamburg sey $145\frac{3}{4}$, der wirkliche $145\frac{1}{2}$, der limitirte nach London sey $140\frac{7}{8}$, der wirkliche $140\frac{5}{8}$; also wieder beyde zum Nutzen verändert, und zwar um dieselbe Differenz $\frac{1}{4}$ zum Nutzen. Aber da sich dieser schon an $140\frac{5}{8}$ per London, hingegen erst an $145\frac{1}{2}$ per Hamburg findet: so ist das Remittiren nach London vorzuziehen.

Man setze nämlich, beyde Differenzen zum Nutzen seyen ungleich, z. B. die Differenz zwischen dem limitirten Kurs auf Lyon à $76\frac{7}{8}$ und dem wirklichen à $77\frac{1}{2}$ ist $\frac{5}{8}$, und die Differenz zwischen dem limitirten Kurse auf Bremen à $105\frac{7}{8}$ und dem wirklichen à $106\frac{3}{4}$ ist $\frac{7}{8}$. Will man nun den nützlichsten Platz finden: so berechnet man, wieviel fl. W. zahl. 1 fl. Nutzen geben, indem man setzt: $\frac{5}{8} : 1 = 77\frac{1}{2} : x$, dann $\frac{7}{8} : 1 = 106\frac{3}{4} : y$. Aus der ersten Proportion hat man $x = 124$, aus der zweyten $y = 122$. Daraus sieht man, daß an 124 per Lyon erst 1 Nutzen, aber derselbe Nutzen schon an 122 per Bremen erhalten werde; Bremen demnach der nützlichste Platz sey.

Beyspiel zum VII. Hauptfall.

Frankfurt (als Kommissionär) soll einen Pariser Wechselbrief von 8000 Liv. Ts. zu $76\frac{1}{4}$, und einen Londner von 300 Pfund Sterling zu $140\frac{3}{4}$ auf seinem Platze verhandeln; aber der Londner Kurs ist gegenwärtig $140\frac{1}{4}$. Zu welchem Kurse muß daher der Pariser Brief verkauft werden, um dem Kommittenten nicht zu schaden?

Nach des letzteren Willen würden, da 200 Liv. Ts. $76\frac{1}{4}$ geben sollen, jene 8000 L. T. die Summe $= 76\frac{1}{4} \times 8000 : 200 = \frac{305}{800}$ 8000 $= 305 . 10 = 3050$ fl. Wechselzahlung geben. Und da 15 Pf. Sterl. $140\frac{3}{4}$ geben sollen: so würden 300 Pf. St. die Summe von $140\frac{3}{4} \times 300 : 15$, oder $\frac{563 . 300}{4 . 15}$ $= 2815$ fl. Wechselzahl. geben müssen. Nun findet man auf gleiche Weise, daß zu dem Kurse $140\frac{1}{4}$ nur 2805, 10 fl. W.zahl. zu wenig, erhalten werden. Diese müssen demnach durch den Kurs auf Paris eingebracht werden, indem man statt 3050 nun 3060 fl. W.zahl. einnimmt. Um also den hiezu nöthigen Kurs zu finden, schließe man: wenn 8000 Liv. Ts. 3060 fl. W.zahl. geben sollen, was muß für jede 200 L. T. eingenommen werden? Oder man setze:

$$8000 : 200 = 3060 : x,$$

woraus der gesuchte Kurs x auf Paris $= 76\frac{1}{2}$ gefunden wird.

Beyspiel zum VIII. Hauptfall.

Es sey das vorige Beyspiel, allein der Pariser Kurs sey auf $76\frac{1}{2}$ gestiegen, und der Londner auf $140\frac{1}{4}$ gefallen. Kann der Wille des Kommittenten erfüllt werden?

Man muß hiebey, ganz wie vorhin, die Summen W.zahl., welche der Kommittent verlangt, ferner auch die Summen berechnen, welche man bey den veränderten Kursen empfangen kann. Gleichen dann diese Empfangsummen jenen gefoderten Summen, oder sind jene noch größer als diese; so kann der Auftrag vollzogen werden.

Es ist aus dem vorigen Beyspiele klar, daß der Kommittent die Summe von $3050 + 2815 = 5865$ fl. W.zahl. für beyde Briefe verlange. Wenn man nun berechnet, wieviel man nach den veränderten Kursen erhalte, indem man setzt:

$$76\frac{1}{4} : 76\frac{1}{2} = 3050 : x$$

und $140\frac{3}{4} : 140\frac{1}{4} = 2815 : y,$

so findet man $x = 3060$, und $y = 2805$; da nun auch diese $x + y$ die Summe $3060 + 2805 = 5865$ d. i. dieselbe Summe geben, welche der Kommittent verlangt: so sieht man, daß der Auftrag vollzogen werden kann.

Anmerkung. Man findet die Wechsel- und Wechselkommissionsrechnung in folgenden Schriften: Allgemein faßliches und vollständiges Rechenbuch, oder Versuch einer leichten Art den Kindern die ganze Rechenkunst gründlich beyzubringen von Pet. Witz Pfarrer zu Biel. 2 Theile. Bern b. Waldhard 1809 und „die acht Hauptfälle der Wechselkommissionsrechnung durch die Ziffernrechnung deutlich und ausführlich abgehandelt, und durch die Buchstabenrechnung gründlich beleuchtet und bewiesen von G. K. Chelius Frankf. a. M. 1813 bey Brönner —“ ziemlich lich ausführlich abgehandelt.

Der gemeinen Arithmetik Fünfter Theil.

Die Lehre von den ganzen benannten Zahlen von verschiedener Art *)

§. 186.

Aufgabe 1: Gegebene Zahlen von verschiedener Art oder verschiedenen Namen auf eine gleiche Zahl zurückezuführen, welche einerley Art ist mit der gegebenen Zahl von der niedrigsten Art; und umgekehrt.

Auflösung. Man verfahre nach der im §. 158. (Anm. 1. und 2.) gegebenen Vorschrift, oder nach §. 170. Anm. 2.

*) Der Ausdruck „verschiedner Art" drückt hier durchgängig aus, daß die benannten Zahlen zwar entweder höherer oder niederer Art, aber ihrer Gattung nach einerley Zahlen sind.

Anmerkung. Stößt man bey der Reduktion einer benannten Zahl niederer Art auf einen Rest, oder auf einen Bruch: so setze man die Division nach §. 113. fort, oder verwandle den gemeinen Bruch in einen zehntheiligen nach §. 115. Daraus erhält man den Vortheil, daß man die gegebene benannte Zahl auf die leichteste Art im bestimmten immer kleineren Maße oder Gewichte u. d. gl. angeben kann. Man sey z. B. auf 13 Metzen Korn, als Resultat irgend einer Rechnung, gekommen. Sollte man nun diese Zahl im Würzb. Maße, nach welchem 1 Malter = 2 Achtel, und 1 Achtel = 4 Metzen ꝛc. ... ist, ausdrücken: so erhielte man $\frac{13}{8}$ = 1, 625 Malter; und 0, 625 . 2 (§. 121. Anm. 2.) = 1, 25 Achtel; endlich 0, 25 . 4 = 1 Metze; oder 13 Metzen = 1 Mltr. 1 Achtel 1 Metze. So in ähnlichen Fällen. Hieraus ist zugleich klar, daß man jede Zahl von niederer Art, welche die Einheit höherer Art nicht enthält, doch in dieser durch eine Dezimalzahl ausdrücken kann; z. B. 1 kr. ist = $\frac{1}{60}$ fl. = 0, 0166... fl. u. s. w.

Nimmt man bey dem Längen-, Flächen- und Körpermaße die Dezimaleintheilung, wie jetzt gewöhnlich geschieht, an: so sind die in Ansehung dieser Maße nöthigen Reduktionen (wie überhaupt alle Rechnungsarten) äußerst leicht. Denn nach dieser Eintheilung ist 1 Fuß d. i. $1' = 0,1^\circ$ d. i. $\frac{1}{10}$ einer Ruthe; 1 Zoll d. i. $1'' = 0,1' = 0,01^\circ$, d. i. $\frac{1}{100}$ einer Ruthe, und 1 Linie d. i. $1''' = 0,1'' = 0,01' = 0,001^\circ$ d. i. $\frac{1}{1000}$ einer Ruthe u. s. w. Daher ist ganz so wie in §. 21. der Einl. $3^\circ\ 2'\ 8''\ 4''' = 3284'''$, und umgekehrt. So ist $23479''' = 23^\circ\ 4'\ 7''\ 9'''$. Bekömmt man daher in Ansehung des Längenmaßes einen gemeinen Bruch, und verfährt nach §. 115: so weiß man eben durch diese Verwandlung den Werth des Bruches schon ganz genau; z. B. $\frac{3}{8} = 0,375$; bedeutet daher jener Bruch Ruthen: so ist hier $\frac{3}{8} = 3'\ 7''\ 5'''$. Eben so ist z. B. $23^\circ = 230' = 2300'' = 23000'''$...

Das Maß für die Flächen ist das Quadratmaß. Hier ist 1′ = 0, 01° d. i. $\frac{1}{100}$ der Quadratruthe; 1″ = 0, 01′ = 0, 0001°, d. i. 1 Quadratzoll = $\frac{1}{10000}$ der Quadratruthe u. s. w. Daher ist hier 6° d. i. 6 Quadratruthen = 600′ = 60000″; und 2° 3′ 4″ = 20304″ d. i. Quadratzolle; und 234672 Quadratzolle = 23° 46′ 72″; oder 234″ = 0° 02′ 34″. Der Bruch $\frac{3}{4}$ Quadratruthen ist daher = 75′.

Das Maß endlich für die Körper ist das Kubikmaß. In diesem Maße ist 1′ = 0, 001° d. i. $\frac{1}{1000}$ einer Kubikr.; 1″ = 0, 001′ = 0, 000001° d. i. $\frac{1}{1000000}$ einer Kubikr. u. s. w. Daher ist hier 3° = 3000′ = 3000000″; und 2 3′ 4″ = 2003004″; oder 3763257″ = 3° 763′ 257″;

folglich $\frac{3^\circ}{7}$ = 428′ 571″ . . .

§. 187. Aufgabe 2. Gegebene ganze benannte Zahlen von verschiedener Art zu addiren.

Auflösung. Sind 1) die gegebenen Zahlen blos von verschiedener Art: so müssen die benannten Zahlen der höchsten Art auf die der niedrigsten Art nach §. 186. resolvirt, und dann erst addirt werden. Die erhaltene Summe wird dann wieder auf die Zahlen höherer Art reduzirt.

Beyspiel. Man soll 12 Ruthen, 232 Fuß, 2636 Zolle addiren; hier ist

12° = 1200″
232′ = 2320″
2636″ = 2636″

Summe = 6156″ = 61° 5′ 6″.

Kommen aber 2) unter den gegebenen Zahlen verschiedener Art wieder mehrere von einerley Art vor: so addirt man die von einerley Art, so, daß man zuerst die von der niedrigsten Art, und so Ordnungsweise hinauf, addirt, und jedesmal sogleich soviel Einheiten zur folgenden Summe der

Zahlen höherer Art addirt, als wie oft eine Einheit dieser Art in der vorigen Summe enthalten ist.

Beyspiel.

	26 Tage,	18 St.	56 Min.	38 Sek.
	8 —	23 —	19 —	28 —
Summe	35 Tage	8 St.	16 Min.	6 S.

Eben so

30 fl. +	12 kr. +	2 Hel.
20	45	3
39	27	1
56	39	2
Summe 147 fl. +	5 kr. +	0 Hel.

Anmerkung. Man kann sich das Reduziren erleichtern, wenn man nur jedesmal soviel Einheiten zusammenzahlt, wieviele eine Einheit höherer Art ausmachen. Bey den Kreutzern z. B. zählt man nur die Ziffern der Einer zusammen; dann aber bey der Addition der Zehner sieht man nun, wieoft man 6 zählen könne: um sogleich zu wissen, wieviele fl. und kr. die Columne gebe. In unserem Beysp. findet man 23 kr. in der Einersumme; man schreibt 3 an; addirt 2 zum Zehner 3, hiezu noch 1 aus 2 hat man einmal 6, welche Zahl man dann nochmals bekömmt. Man hat also 2 fl. 3 kr., also 5 kr. wegen 8 Hel. = 2 kr.

§. 188. Aufgabe 3. Eine kleinere gegebene ganze benannte Zahl von einer größeren verschiedner Art abzuziehen.

Auflösung. Sind auch hier wieder 1) die gegebenen Zahlen lediglich verschiedner Art: so muß man sie auf Zahlen von einerley Art bringen. Dann zieht man, wie bey ganzen Zahlen überhaupt, die kleinere von der größern ab.

Beyspiel 1.

(im Flächenmaße)

Min. 23′ = 2300″

Subt. 42″ = 42″

Diff. = 2258″ = 0° 22′ 58″.

Beyspiel 2.
(im Kubikmaße)

$23^{\circ} = 23000'$
$148' = \quad 148'$

Diff. $= 22852' = 22^{\circ}\ 852'$.

Kommen aber 2) im Minuend und im Subtrahend Zahlen von einerley Art vor: so zieht man wieder, wie gewöhnlich, zuerst die Zahl von der niedrigsten Art, und so Ordnungsweise hinauf, von der ihr entsprechenden Zahl ab. Muß man, um eine größere Zahl gewisser Art von einer kleinern derselben Art abziehen zu können, borgen: so addirt man eine Einheit der höheren Art, in eine gleiche Zahl derselben nächst niedern Art, zu deren Zahl man entlehnen muß, verwandelt, zu eben dieser Zahl.

Min. 30 Zentn.	75 lb.	24 Lothe.	
Subtr. 18	— 89	— 26	—
Diff. 11 Z.	85 lb.	30 L.	

1 ℔ nämlich = 32 Loth, 1 Zntr. = 100 ℔.

Beyspiel 3. A starb im J. 1814 den 4ten Junius in einem Alter von 50 J. 3 Mon. 7 T., wann war A geboren?

Bey Berechnung dieser Art von Beyspiele ist zu bemerken: 1) die Monate Januar, Februar u. s. w. werden mit den Zahlen 1, 2, — 12 nach der Ordnung bezeichnet; — 2) der Januar oder 1 hat 31 Tage; 2 hat 28 oder 29, 3 31, 4 30, 5 31, 6 oder Junius hat 30, 7 31, 8 31, 9 30, 10 31, 11 30, 12 31 Tage; 3) die Stunden werden von Mitternacht an gezählt; 4) um ein gegebenes Datum anzuschreiben, muß man das Jahr, das Monat, den Tag um 1 niedriger ansetzen, z. B. den 12ten März des Jahres 1813 Nachmittags 5 Uhr; dieses wird so geschrieben 1812 + 2 Mon. + 11 T. + 17 Stund. Hieraus erhellt, wie man umgekehrt ein solches Datum lesen müsse.

Unser Beyspiel ist also so anzusetzen:

$$\begin{array}{rrr} 1813 \text{ J.} & + 5 \text{ Mon.} & + 30 \text{ T.} \\ -(\ 50 - & + 3 \ldots & + 7\ ) \\ \hline 1763 & + 2 \text{ M.} & + 23 \text{ T.} \end{array}$$

A war demnach geboren den 23ten März des J. 1764.

§. 189. **Aufgabe 4. Gegebene ganze Zahlen von verschiedner Art zu multipliziren.**

Auflösung. Sollen 1) Zahlen verschiedener Art miteinander multiplizirt werden: so resolvirt man die von der höheren Art auf eine gleiche der niedern Art. Dieser Fall trifft wieder vorzüglich bey Berechnung von Flächen und des körperlichen Inhaltes ein. Hier ist nun zu merken, daß das Produkt der Zahlen in einerley Längenmaße eine Zahl giebt, welche anzeigt, wie groß die Fläche in demselben Quadratmaße sey, und daß das Produkt der Zahlen, deren eine ein Quadratmaß und die andere ein Längenmaß von derselben Art bestimmt, eine Zahl giebt, welche anzeigt, wie groß der körperliche Inhalt in demselben Maße sey.

Beyspiel 1. (Im Längenmaße).
$36' \times 6'' = 360'' \times 6 = 2160'' = 21'60'''$ d. i. 21 Quadratfuß und 60″ Quadratzolle.

Beyspiel 2. (Im Flächen- und Längenmaße).
$29° \times 4'' = 290000'' \times 4 = 1160000'' = 1° 160'$, d. i. 1 Kub. ruth. und 160 Kub. fuß.

Sollen 2) mehrere Zahlen verschiedner Art mit einer Zahl multiplizirt werden: so kann man, um sogleich reduziren zu können, jede Zahl von der niedrigsten Art bis zur höchsten mit dem Multiplikator auf gewöhnliche Art, multipliziren, ohne, wie vorhin, die Zahl zu resolviren.

Beyspiel. Ein Gut erträgt jährlich 2348 fl. 45 kr., welches ist der dreyjährige Ertrag?

Man setze

$$\begin{array}{r} 2348 \text{ fl. } 45 \text{ kr.} \\ 3 \\ \hline 7046 \text{ fl. } 15 \text{ kr.} \end{array}$$

oder:

(Nach der Eintheilung des Kreisumfanges).

$$\begin{array}{r} 3^\circ\ 56'\ 42'' \\ 4 \\ \hline 15^\circ\ 46'\ 48''. \end{array}$$

Anmerkung 1. Wollte man dem gemäß, was wir oben in der Anm. zum §. 186. beybrachten, die Zahlen niederer Art der Zahl der höchsten Art vermöge eines zehntheiligen Bruches beyfügen: so würde man dieses Verfahren nicht nur zu weitläuftig, sondern auch weniger exakt finden, als die angegebene ganz natürliche Verfahrungsart. Eben so ist die sogenannte Welsche Praktik viel zu weitläufig, als daß wir sie empfehlen könnten.

Anmerkung 2. Anfänger müssen sich wohl hüten, die unrichtige Vorstellungsart hier anzunehmen, als multiplizirten wir im ersten Beyspiele den Multiplikand mit 3 Jahren, oder als würde in den frühern Beyspielen eine Länge mit Länge (Linie mit Linie) oder eine Fläche mit einer Linie multiplizirt; wodurch wir entweder fl. oder kr., oder Flächen, oder Körper erhielten, was offenbar widersinnig wäre.

Da der Multiplikator seiner Natur nach nur anzeigt, das Wievielfache vom Multiplikand das Produkt sey (§. 13): so ist derselbe immer eine unbenannte Zahl, und das Produkt nur erhält den Namen oder ist von derselben Art wie der benannte Multiplikand. Eben so multiplizirt man in der goldnen Regel nicht z. B. lb. mit fl. oder Batzen u. d. gl., sondern nur Zahlen, wodurch eine bestimmte Menge gewisser Art ausgedrückt wird, miteinander. Eben so sucht man bey der Multiplikation von Längen mit Längen, wie

man sich ausdrückt, nur ein Zahlenprodukt, wodurch die Zahl z. B. der Quadratfuße u. d. gl. für die Fläche erhalten wird.

Dasselbe Bewandtniß hat es mit der Division. Der Dividend wird als Produkt, der Divisor als Multiplikator und der Quotient als Multiplikand betrachtet. Der Quotient ist daher von einerley Art mit dem Dividend, aber der Divisor seiner Natur nach unbenannt. So oft wir daher ein Zahlenprodukt der einfachen goldnen Regel gemäß durch eine Zahl dividirten: so erhielten wir durch den Quotienten eine Zahl, welche die bestimmte Quantität desjenigen Dinges ausdrückte, das von einerley Art mit dem dividirten Produkte war. Auf gleiche Art erhält man, wenn man sagt, man dividire eine Fläche durch eine Linie, aus Zahlen einen Quotienten, als Zahl, welche die bestimmte Quantität z. B. der Fuße für die Seiten anzeigt.

§. 190. Aufgabe 5. Gegebene ganze Zahlen von verschiedener Art zu dividiren.

Auflösung. Wir müssen hier besonders 3 Fälle unterscheiden. Sind 1) beyde Zahlen, die durcheinander dividirt werden sollen, verschiedener Art: so reduzire man den größeren Dividend auf eine gleiche Zahl von einerley Art mit dem Divisor, welcher dann blos als Zahl betrachtet wird. Diese Art von Division muß der Feldmesser und Forstmann öfters anwenden. Er muß aber hierbey bemerken, daß, wie man sich auszudrücken pflegt, Flächenmaß durch Längenmaß dividirt, Längenmaß — Kubikmaß durch Längenmaß dividirt, Flächenmaß giebt.

Beyspiel 1. Ein Oblong oder Rechtek hat 4 Quadratruthen, 50 Quadratfuße, seine kleinste Seite 15 Fuße; man will die größere Seite wissen. — Hier ist $4^{\circ}\ 50' = 450'$ also $450' : 15 = 30'$ im Längenmaße.

Beyspiel 2. Ein beschlagener 50′ langer Eichbaum von beynahe durchaus gleichem Durchmesser enthält 2 Kub. ruthen; man will eine seiner Endflächen wissen. Hier wird 2° = 2000′ durch 50 dividirt; die Zahl 40 als Quotient zeigt an, daß eine jener Endflächen 40 Quadratfuße enthalte.

Beyspiel 3. Wollte man die Länge jenes Stammes wissen: so dividirte man 2° = 2000′ durch 40, woraus man 50 Fuß Länge fände.

Enthält 2) der Dividend Zahlen verschiedener Art: so fügt man entweder mittels eines Dezimalbruches die Zahlen der niedern Art der Zahl der höhern Art bey, oder, was öfters viel leichter ist, man resolvirt die Zahl höherer Art in eine gleiche Zahl der nächstniedern, addirt dann die gegebene Zahl derselben Art u. s. f.; oder man dividirt jede gegebene Zahl, von der Zahl der höchsten Art angefangen, durch denselben Divisor, indem man immer den Rest, wenn ein solcher bleibt, zur Zahl der nächstniedern Art schlägt.

Wir ziehen die zuletzt angegebene Verfahrungsart allen übrigen vor, weil sie jede Reduktion des Quotienten unnöthig macht, wenn nicht noch zuletzt ein Rest bleibt, den man in einer gleichen Zahl einer noch niedern Art ausdrücken kann.

Beyspiel. Es seyen 62 fl. 7 Batzen, 1 kr. unter 3 zu vertheilen; was ist der Antheil eines jeden?

Man setze

(62 fl. 7 B. 1 kr.) : 3, der Quotient ist 20 fl. 10 B. 2 kr. Indem man nämlich 62 durch 3 dividirt, hat man 20 Ganze, mit dem Reste 2 fl. = 24 Batz., diese zu 7 B. addirt, ist der zweyte Dividend = 31 B. Aber $\frac{31}{3}$ = 10 mit dem Reste 1 = 1 B. = 5 kr.; daher ist 6 kr. der 3te Dividend.

Wird 3) auch der Divisor so ausgedrückt, daß er Zahlen von verschiedener Art enthält: so bringt man am leichtesten sowohl den Dividend, als den Divisor, auf eine gleiche Zahl derselben niedrigsten Art, und verfährt dann nach den gewöhnlichen Divisionsregeln.

Beyspiel. Unter die ärmern Schüler einer Klasse sind 292 fl. 3 B. 3 kr. so zu vertheilen, daß jeder der Theilnehmer 48 fl. 8 B. 3 kr. erhält; man will die Anzahl der Theilnehmer wissen. — Es ist 292 fl. 3 B. 3 kr. = 17538 kr. und 48 fl. 8 B. 3 kr. = 2923 kr. Also 17538 : 2923 = 6 = der Anzahl der Theilnehmer.

Die Beweise für die Richtigkeit des in Betreff der 4 Rechnungsarten mit benannten Zahlen von verschiedener Art vorgeschriebenen Verfahrens findet man von selbst aus den Beweisen für die Rechnung in ganzen unbenannten Zahlen und aus §. 186.

Beylagen
zur Rechnung mit benannten Zahlen.

I.
Alte Maße.

A.
Hebräische Maße.

1. Längenmaße.

1. Kanch (Ruthe) = 6 Amah (Elle) = 12 Zereth (Spanne) = 36 Tophach (Palme) = 144 Ezbeah (Finger).

Die Hebräische Meile wird gewöhnlich = 4106,88, die Ruthe = 10,2672 pariser Fußen; die Elle = 20,5344, die Spanne = 10,2672, die Palme = 3,4224 par. Zollen, und der Finger = 10,2672 par. Linien gesetzt. Der Sabbatherweg, dessen Hälfte der Gibrath, war $333\frac{1}{3}$ Ruthen, od. 3422,4 par. F.

2. Getreidemaße.

1 Chomer (oder Corus) = 2 Lethech (= 10824 par. Kubikzoll, nach Lesparat = 16207, nach Nicander = 14467) = 10 Ephah = 30 Seah oder Satum = 100 Homer, oder Gotum = 180 Kabus = 4320 Ovum Rabbin.

3. Flüssigkeitsmaße.

1 Bathus oder Ephah (der Metretes bey den Griechen) = dem kubirten Zereth = 6 Hin (= 1082,4 par. Kubikzoll, nach Lesparat = 1620,7; nach Nicander = 1446,7) = 72 Logus = 432 Ovum Rabbin.

4. Münzen und Gewichte.

1 Kikar (Talent) = 50 Manch (Mine) = 3000 Sekel (Siclus) = 60000 Gerah (obolus) = 2592000 Minutum (λεπτον).

1 Kikar, als Gewicht, ist = 171 köllnischen Marken und 46404 Richtpfenningen; als Silbergeld = 4121,94 fl. Da nun das Verhältniß des Silbers zum Golde 1 : 12 war: so ist 1 Kikar oder 1 Talent Goldes = 45463,28 fl. unseres Geldes.

Sekel (siclus, oder schlechthin argenteus) war bey den Hebräern das, was bey den Griechen Stater, oder die alexandrinische Didrachme, oder die kleine attische Tetradrachme war; er wog 3751,02 kölln. Richtpfen., und als Geld wird er 1,37398 fl. gleichgesetzt.

B.

Griechische Maße.

1. Längenmaße.

1 Ἄκαινα μεγα, oder δωδεκαποδής (die zwölfschuhige Ruthe, zum Unterschiede der 10schuhigen δεκαποδής) = 2 Ὀργυιά (ἑξαποδήσ) = $2\frac{2}{3}$ Ξυλον = 8 Πῆχυς (die gemeine oder lithische Elle, auch Mittelelle Herodois genannt) = $10\frac{2}{3}$ Πυγμή (die Länge von den eingelegten Fingern bis zum Ellenbogen, — mittlerer griechischer Fuß, zum Unterschiede von dem großen gr. F. πυγων, welcher um $\frac{1}{2}\frac{4}{7}$ des δακτυλος μικρος größer, als der erste war) = 12 Ποῦσ γεωμετρικός = 16 Σπιθαμη (Spanne zwischen dem Daumen und kleinen Finger) = $19\frac{9}{11}$ Ορθόδωρον (flache Hand der Länge nach vom Gelenke bis zum äußersten Finger) = $19\frac{1}{5}$ Λιχάς (Spanne zwischen dem Daumen und Zeigefinger) = 48 Παλαιστη (Querhand, oder Breite der 4 Finger) = 96 Κονδυλος (halbe Querhand) = 144 Δακτυλος μεγας (pollex) = 192 Δακτυλος μικρος (Fingerbreite).

Wenn man, wie gewöhnlich, die Länge des mittleren griechischen Fußes (πυγμη = 18 Δακτ. μικρ.), als Einheit, zu 138,6072 par. Lin., also den Δακτ. μικρ. zu 7,7004 solcher

Linien annimmt: so kann man nun leicht alle übrigen Maße schätzen. So hatte die 12schuh. Ruthe der Griechen 10,2672 par. F.; der geometrische Fuß = 16 Δακτυλοις 123,2064 par. Lin. Die quadrirte 10schuhige Akäne war die Ἄρουρα oder das gewöhnliche Flächenmaß der Griechen, = 7252,2256 par. Quadratfuß.

Noch hatten die Griechen Βῆμα ἁπλοῦν = 40, und διπλοῦν = 80 δακτ. μικρ. Ein noch größeres Maß, als die Akäne war Πλέθρον = 1600 δακτ. = 85,56 par. F., und der persische Σχοῖνος = 1920 δακτ. = 102,672 par. F.; die Hälfte dieses Maßes war die Länge der Feldmesserkette (χεβελ).

Noch sind folgende, in den verschiedenen Staaten Griechenlandes üblichen, Maße zu bemerken:

1) Fuß	des kleinen Stadiums	= $9\frac{9}{16}$ Δακτ.	= 73,6349 par L.
	des Cleomedischen —	= $12\frac{13}{16}$ —	= 98,6613 —
	Pythischer (auch Fuß von Marseille)	= $14\frac{2}{9}$ —	= 109,5168 —
	Griechisch-olympischer	= 17,69 —	= 136,11 —
	Königlicher oder Philotärischer	= 20 —	= 154,008 —
2) Elle	Pythische oder Delphische, od. die kleine Elle von Aegypten und Samos	= $21\frac{1}{3}$ —	= 164,2752 —
	Königliche oder des Herodot, schwarze Elle der Araber	= 27 —	= 207,9108 —
	Heilige, od. Elle von Kairo, od. des Nilmessers, Hachemische El d. Arab	= 32 —	= 246,4128. —

Nach Hrn. Girard (Mitglied des Nationalinst. zu Paris) hat die altägypt. Normalelle des Nilmessers 276,3616992 par. L.

Hr. Prof. Weigl führt noch S. 561. seiner Arithm. u. Algebra die Reisemaße der Alten an. Indem ich desselben Angaben hier folge, bemerke ich nur, daß die meisten derselben schwankend seyen, von Verschiedenen verschieden an-

gegeben werden, daß daher hier nur von den wahrscheinlichsten Angaben die Rede seyn könne. So ist man durchaus über das Stadium des Eratosthenes zweifelhaft; und selbst das große alexandrinische Stadium wird nach Lulofs (beynahe eben so nach le Roy) zu 685 par. F. angegeben.

	paris. Fuß	auf 1 geogr. Meile gehen
1. Stadium des Aristoteles (der Märsche Alexanders des Großen) . .	306,812	74,323
2. Stadium des Cleomedes . .	411,09	55,47
3. — Pythisches oder Delphisches	456,32	49,972
4. — des Eratosthenes . .	486	46,92
5. — nautisches Herodots u. Posidonius	513,36	44,419
6. — Griechisch-olympisches .	567,13	40,208
7. — Philetärisches . . .	641,7	35,535
8. — großes, od. d. Aegyp. od. Alexand.	684,09	33,333
9. Der Δίαυλος	1026,72	22,210
10. Das Ἱππικον	2053,44	11,105
11. Die persische oder asiatische Meile	5133,6	4,4419
12. Die indische Koß . . .	7700,4	2,9613
13. Der Δολιχός	8221,8	2,7735
14. Die Parasange des Herodot .	15400,8	1,4806
15. Der Σχοῖνος von Delta od. Niederägypt.	20534,4	1,1105
16. — — v. Oberägyp. od. d. thebaische	30801,6	0,7752
17. — — Heptanomische v. Mittelägyp.	61603,2	0,3876
18. Die Tagreise Δίαιτα . . .	154008	0,14806.

2. Getreidmaße.

Die Einheit der körperlichen Maße war bey den Griechen durchaus der kubirte Fuß, und hieß für die Getreidmaße μεδιμνος, und rücksichtlich des Flüssigkeitsmaßes μετρητης. Nach der oben angeführten Verschiedenheit des Fußes waren daher auch beyde Einheiten, so wie die übrigen Maße verschieden. So ist die μετρητης nach dem mittleren griechischen Fuße (πυγμη = 138,6072 par. Lin.) 1540,8 par. Ku-

bikzollen, aber nach dem griechisch-olympischen Fuße = 1459,2 Kubikzollen u. s. w. nach Lesparat ist dieser Kubikf. = 1482 und nach Nicander = 1472. Der μεδιμνος = $1\frac{1}{3}$ μετρ. = 1976 Kubikzoll.

Die Unterabtheilungen rücksichtlich der Einheit des Getreidmaßes sind folgende:

1 Μέδιμνος = 6 Ἑκτευς = 12 Ἡμιεκτος = 48 Χοῖνιξ = 96 Ξέστης = 192 Κοτυλος = 768 Ὀξύβαφον = 1152 Κυαθος = 11520 Κοχλιάριον.

3. Flüssigkeitsmaße.

1 Μετρητής = 12 Χῦς = 72 Ξέστης = 144 Κοτυλος = 288 Τέταρτον = 576 Ὀξύβαφον = 1728 Κόγχη = 3456 Μύστρον = 4320 Χήμη = 8640 Κοχλιάριον.

4. Münzen und Gewichte.

Die Einheit für beyde war die Schwere der Metrātā von Oel, und hieß Talent = 106 kölln. Mark und 19364 Richtpfen., als Gold aber = 2551,68 fl. unseres Geldes = 60 Minen; die Mine = 1 Mark 50567 Richtpfen. oder 42,5 fl. = 100 Drachmen; die Drachme also = 1161,03 Richtpf. = 0,425 fl. = 25,5 kr. = 6 Obolen; der Obolus also = 139,505 Richtpf. = 4,25 kr. = 3 Keration = 8 Chalkus = 48 Lepton (1 Lepton = 4,04704 Richtpfen. = 0,708 Heller).

Demnach war mit noch einigen Zwischengewichten 1 Ταλαντον = 60 Μνᾶ = 1500 Τετράδραχμον = 3000 Δίδραχμον = 6000 Δραχμὴ = 18000 Γράμμα = 36000 Ὀβολος = 108000 Κεράτιον = 288000 Χαλκοῦς = 1728000 Λεπτόν.

Verschiedene Drachmen und Talente der Griechen.

	par. Gran	Als Gewicht köllн Mrk.	Als Gewicht Richtpfen	Als Münzen
1. Drachme von Aegium, oder die Peloponesische .	60	—	893,10	19,6 kr.
Talent	—	81	50184	1962,84 fl
2. Drachme von Samos, od. kleine attische (ἐλκη) .	63	—	937,755	20,6 kr.
Talent	—	85	55970	2060 fl.
3. Dr. von Chalcis u. Euböa	66	—	982,41	21,5 kr.
Tal.	—	89	61756	2259,1 fl.
4. Dr. von Tyrus, phönizische	69	—	1027,065	22,5 kr.
Tal.	—	94	2006	2257,26 fl
5. Dr. v. Ephesus, od. Jonische	72	—	1071,72	23,5 kr.
Tal.	—	98	7792	2355,42 fl
6. Dr. von Creta oder Chios	75	—	1116,375	24,5 kr.
Tal.	—	102	13578	2453,52 fl
7. Dr. attische, od. Mitteldr.	78	—	1161,03	25,5 kr.
Tal.	—	106	19364	2551,68 fl
8. Dr. attisch-sicilische .	81	—	1205,685	26,49 kr.
Tal.	—	110	25150	2649,84 fl
9. Dr. große att. od. korinth.	84	—	1250,34	27,4 kr.
Tal.	—	119	3256	2747,94 fl
10. Dr. v. Abacöne od. Istros	90	—	1339,65	29,4 kr.
Tal.	—	122	42508	2944,26 fl
11. Dr. von Pylos od. Elis	96	—	1428,96	31,4 kr.
Tal.	—	130	54080	3140,52 fl
12. Dr. v. Reggium, od. Naxos	105	—	1562,925	34,3 kr.
Tal.	—	143	5903	3434,94 fl
13. Dr. von Alexandrien .	126	—	1875,51	41,2 kr.
Tal.	—	171	46404	4121,94 fl
14. Dr. von Aegium . .	140	—	2083,9	45,7 kr.
Tal.	—	190	51560	4579.92 fl

Anmerkung. Wir haben bey der bisherigen Darstellung die Hauptwörter der Maße und Gewichte mit Fleiß undeklinirt gelassen, z. B. statt 1 Akänä = 192 Δακτυλοις μικροις gesetzt 1 Ak. = 192 Δακτυλος μικρος, damit ein jeder sogleich diese Hauptwörter gleichsam in ihrer Ursprünglichkeit erkennen möge. Dasselbe thun wir bey den folgenden Maßen.

C. Römische Maße.

1. Längenmaße.

Ueber die Größe des römischen Fußes, der Einheit der röm. Längenmaße, herrschen so verschiedene Angaben, daß wir heut zu Tage nur eine mittlere Größe desselben annehmen können. Wir setzen daher nach den in der monatl. Corresp. des Freyh. von Zach (Decemb. 1804) angegebenen Untersuchungen den römischen Fuß = 133,928 par. Lin., welche Zahl wir hier durchaus als einzige Reduktionszahl nehmen.

Die Römer theilten übrigens den Fuß in folgende kleinere Maße:

1 Pes = 4 Palmus = 12 Uncia (1 Unc. war überhaupt das Zwölftel eines Ganzen) = 16 Digitus = 48 Sicilicus oder Siciliquus (der Sic. war überhaupt das Viertel vom Zwölftel, oder der 48ste Theil eines Ganzen) = 288 Scrupulus. Also 1 Palmus = $\frac{1}{4}$ Fuß = 33,482, und 1 Digitus = $\frac{1}{16}$ Fuß = 8,370 par. Lin.

Größere Maße, als der Fuß, waren 1) Cubitus (Elle) = $1\frac{1}{2}$ Fuß = 6 Palmis = 1,395 par. Fuß; 2) Passus = $3\frac{1}{3}$ Cub. = 5 pedibus = 4,650 par. Fuß; 3) Stadium Olympicum = 125 Pass. = $416\frac{2}{3}$ Cub. = 625 ped. = 581,284 par. Fuß; 4) Milliarium (Meile) = 8 stad. ol. = 1000 pass. = 5000 ped = 4650,3 par. Fuß.

Lapis, ein aus Stein ausgehauener kugelförmiger Meilenzeiger, bedeutete also eben das, was ein röm. Milliarium. Solche Steine zeigten durch die auf denselben eingehauenen Zahlen, wie weit man von Rom weg war, z. B. tertio, quarto, tricesimo ab urbe lapide hieß: 3, 4, 30

Meilen von Rom, oder von dem römischen Forum, auf welchem Platze eine solche Meilensäule vergoldet stand, die Milliarium aureum hieß. Von dieser Säule fieng man die Meilen rund herum in allen römischen Provinzen zu zählen an.

2. Flächenmaße.

Der römische Morgen Jugerum hatte in der Breite 120 und in der Länge 240 pedes, also 28800 römische, oder 24912,096 par. Quadratfuße; er war demnach beynahe noch einmal so klein, als der große altfranzösische Morgen (Arpent).

Die Hälfte des Jugeri hieß Actus quadratus (Acnua = $120^2 \square'$), der 8te Theil Clima (= $60^2 \square'$), der 60ste Actus minimus (4′ breit, 120′ lang), und der 288ste Theil hieß Scripulum (= $10^2 \square'$).

Größere Maße, als der Jugerum, waren bey den Römern 1) Haeredium = 2 Jug.; — 2) Centuria = 100 Haered. = 200 Jug.; — 3) Saltus = 4 Cent. = 800 Jug.

3. Maße für trockene und flüßige Waare.

Für beyde war der kubirte röm. Fuß die Einheit; diese hieß für trockene Waare der Quadrantal, und für flüßige Waare die Amphora quadrantal; jedes dieser Maße ist also = $133{,}928^3$ par. Kubiklin., oder = 1390,178 par. Kubikzoll.

Beyde Maße hatten ferner mehrere kleinere Maße mit gleichen Benennungen unter sich: nämlich 1 Quadrantal sowohl, als 1 Amphor. quadr. war = 48 Sextarius = 96 Hemina = 192 Quartarius = 384 Acetabulum = 576 Cyathus = 2304 Ligula.

Allein als Getreidmaß hatten die Römer noch den Modius (Metze) = ⅓ des Quadrantal = ⅙ des Medimni attici, und ein noch größeres Flüßigkeitsmaß, als die Amphora, war der Culeus = 20 amphor. = 27803,56 pariser Kubikzoll (= 7,4 Würzb. Eimer beynahe, indem die Amphora quadr. beynahe 23½ Würzb. Eichmaß ist). Kleinere

Maße aber waren 1) Urna (Eimer) = $\frac{1}{2}$ Amphor. 2) Congius = $\frac{1}{8}$ Amphor. quadr. Diese demnach = 2 urnis = 8 congiis.

4. Münzen und Gewichte der Römer.

Auch die Römer hatten anfänglich, gleich anderen Völkern, keine Münzen, indem sie ihren Handel durch Tausch trieben. Erst Servius Tullius (der 6te röm. König) ließ Stücke Erzes mit dem Bilde eines Thieres bezeichnen, welche man dann Münze oder Geld (pecunia, a pecude) nannte. Silberne und goldene Münzen erschienen viel später. Ein solches gezeichnetes Stück Erz (oder ähreне Münze) wurde As genannt, war in den ersten Zeiten ein Pfund schwer (libralis) und wurde zugewogen, wenn eine größere Summe abzuführen war. Daher hatte bey den Römern as, libra, pondo die nämliche Bedeutung; daher gebrauchen die Lateiner statt solvere das Wort pendere, und eben daher die abgeleiteten Wörter stipendium, expensum, impendia, demensum (die, aus 4 modiis bestehende, monatliche Pension der Sklaven).

Der Aß, als Pfundgewicht, hatte folgende benannte kleinere Theile:

1 Uncia	- Uncia = $\frac{1}{12}$ Assis		7 Unciae	- Septunx = $\frac{7}{12}$ Assis	
2 Unciæ	- Sextans = $\frac{1}{6}$	—	8 —	- Bes = $\frac{2}{3}$	—
3 —	- Quadrans = $\frac{1}{4}$	—	9 —	- Dodrans = $\frac{3}{4}$	—
4 —	- Triens = $\frac{1}{3}$	—	10 —	- Dextans = $\frac{5}{6}$	—
5 —	- Quicunx = $\frac{5}{12}$	—	11 —	- Deunx = $\frac{11}{12}$	—
6 —	- Sextunx = $\frac{1}{2}$ s. Semissis	—	12 —	- Libra	s. As.

Mit dem Namen As und seinen benannten Theilen belegten die Römer überhaupt jedes andere Ganze; daher die Redensarten: haeres ex asse, ex semisse, ex quicunce ... wodurch sie den Universalerben, oder den Erben der Hälfte oder des Fünftels ... bezeichneten; daher auch die Redensart: sum tuus ex asse (ich bin ganz dein).

Auf die kleineren Theile des Aß beziehen sich einige Münzen, welche der letzte röm. König Tarquinius superbus prägen ließ. Diese waren der Quadrans, Triens und Sextans, was auf den Münzen durch 4, oder 3 oder 2 Punkten angedeutet war, indem z. B. der Triens = $\frac{1}{3}$ des Aß u. s. w. war. Weil alle diese Münzen im Gepräge ein Schiff (navis, ratis) hatten: so wurden sie auch bisweilen (nummi) ratiti genannt.

Der Aß (pondo, libra) wird gewöhnlich = 1 kölln. Mark und 24488,5 Richtpfen. gesetzt, wornach denn 1 Unze = 7502 Richtpf. ist, so, daß man nun leicht die Größe eines jeden der oben angegebenen kleineren Theile, als auch der folgenden Unterabtheilungen des Aß bestimmen kann: nämlich

1 As s. libra = 12 Uncia = 24 Semuncia = 36 Duella = 48 Sicilicus = 72 Sextula = 96 Drachma s. Denarius = 288 Scrupulus = 576 Obolus = 1152 Semiobolus = 1728 Siliqua = 2304 Lens.

Den Werth der römischen Kupfermünzen mit Gewißheit auszumitteln, ist nicht wohl möglich. Hr. Prof. Weigl sagt: der römische Aß würde im bayrischen Gelde 4 1/2 kr. betragen haben, wenn man die Köllner Mark Kupfer nach dem Münzfuße von 1762 zu 100 Pfenningen (im 20 fl. Fuße) ausgemünzt annähme, und wenn nicht anfänglich bey den Römern der Werth des Kupfers gegen Silber sehr gering, oder wie 1 : 960 gewesen wäre. In der Folge erst, da man den Aß nach und nach bis auf eine Unze reduzirte, hob sich der Kupferwerth.

Es fanden übrigens rücksichtlich der Vervielfachungen des Aß noch folgende Benennungen statt:

1. Dupondius = 2 assibus	5. Sexis = 6 assibus
2. Sestertius = $2\frac{1}{2}$ —	6 Septussis = 7 —
3. Tressis s. Tripondius = 3 —	7. Vigesis = 20 — u. s. w.
4. Quinquessis = 5 —	Centussis seu centum pondium = 100 —

Zu bemerken ist noch, daß die römischen Schriftsteller die bekannte Einheit As nicht immer ausdrücklich setzten; so ist in den Sätzen: binos aeris dedit, oder centum aeris debuit das Wort asses ausgelassen.

b. Silber- und Goldmünzen.

Silbermünzen erschienen zu Rom, nachdem der macedonische Krieg mit Pyrrhus glücklich geendigt war. Es scheinen anfänglich nur 3 Arten dieser Silbermünzen geprägt worden zu seyn: nämlich 1) der Denar (denarius die bekannte Hauptsilbermünze), welcher auch von biga und quadriga bigatus oder quadrigatus genannt wurde, weil er in seinem Gepräge einen zwey- oder 4spännigen Wagen hatte; 2) der Quinar (quinarius), bisweilen auch victoriatus genannt, weil er die Siegesgöttinn (Victoria) im Gepräge vorstellte; er war die Hälfte des Denars; 3) der Sestertius = dem 4ten Theile des Denars. Diese Sesterze war lang die kleinste gängige Münze, daher heißt: „nummo sestertio alicui quid addicere" soviel, als einem Käufer etwas um den geringsten Preis zukommen lassen.

In den älteren Zeiten der römischen Republik, wo der Aß noch ein Pfund Kupfer wog, galt der Silberdenar 10 Aß, der Quinar 5, die Sesterze $2\frac{1}{2}$. Die später geprägten kleineren Silbermünzen waren die Libelle (Libella, as) = 1 Aß, die Sembelle oder Selibelle = $\frac{1}{2}$ Aß, und der Teruncius = $\frac{1}{4}$ Aß.

Allein nachdem späterhin der Aß bis auf eine Unze Kupfer verringert worden war, wurde festgesetzt, daß der Denar 16 solcher Aß, d. i. 16 Unzen Kupfer, der Quinar 8, die Sesterze 4 dieser Aß gelten sollte. Blos der Denar, als täglicher Sold eines Soldaten unter den römischen Kaysern, blieb = 10 Aß.

Wie sich übrigens die römischen Schriftsteller der Worte Sestertius und Sestertium bedienen, habe ich oben in der Einleitung schon angeführt.

Etwa 62 Jahre später um das J. 547 der Erb. Roms (V. C.) oder 207 vor Christi Geburt prägte man erst goldene

Münzen. So eine Münze hieß kurz Aureus, oder auch vorzugsweise Nummus; ihr Werth war = 25 Silberdenaren. Man kennt von diesen goldenen Münzen 2 Gattungen, nämlich Nummus vetus s. consularis, und Nummus novus sive imperatorius. Die ersteren sind besser am Gehalte, als die letzteren, welche zu der Kayser Zeiten auch Solidi hießen.

Der Werth des Aureus, wie des Silberdenars, war für verschiedene Zeiten verschieden, indem das Verhältniß des Silbers zum Golde verschieden war. Unter der Voraussetzung, daß nach dem oben genannten Münzfuße die kölln. Mark Goldes zu 283,1 fl., die Mark Silbers aber zu 20 fl. ausgeprägt werden soll, hat Hr. Prof. Weigl in dem oben angeführten Buche folgende Berechnungen des Werthes der römischen Münzen im Baierischen Gelde für verschiedene Epochen angeführt:

Zeitraum	Zhl d Aur. a. 1 Pf Gold	Zhl d Den. a. 1 Pf Silb.	Zhl d Sest. a. 1 Pf Gold	Verhältn des Silb. zum Golde	Werth eines Aureus od Goldenars	Werth eines Silberdenars
I. Zeitr. V. C. 547-560	96	96	5760	1 : 15	5 fl. 9 kr.	20 kr. 5 Hl.
II. 560-620	48	84	4800	1 : $14\frac{2}{7}$	9 fl. 48 kr.	23 kr. 3 pf.
III. 620-635	45	84	4500	1 : $13\frac{1}{2}\frac{1}{8}$	9 fl. 48 kr.	23 kr. 3 pf.
IV. 635-650	42	84	4200	1 : $12\frac{1}{2}$	9 fl. 48 kr.	23 kr. 3 pf.
V. 650-715	40	84	4000	1 : $11\frac{1}{2}\frac{9}{1}$	9 fl. 48 kr.	23 kr. 3 pf.
VI. 715-767	41	86	4100	1 : $11\frac{6}{8}\frac{9}{6}$	9 fl. 30 kr.	23 kr.
VII. v. Tod. Aug. b. Nero	41	88	4100	1 : $11\frac{5}{8}\frac{7}{8}$	9 fl. 16 kr.	22 kr. 2 pf.
VIII. v. T. Ner. b. Car.	45	96	4500	1 : $11\frac{2}{3}\frac{3}{2}$	8 fl. 35 kr.	20 kr. 5 Hl.
IX. Unter Const. d. Gr.	72 solidi	100	1440	1 : $14\frac{2}{3}$	6 fl. $35\frac{3}{4}$ kr.	19 kr. 3 pf.

Wir haben oben in der Einleitung schon bemerkt, daß die Römer auch bisweilen nach anderen, ihnen nicht eigenen Münzen, zählten, nämlich nach Drachmen, Minen und Talenten. Die Drachme war ungefähr das, was der Silberdenar; 100 Drachmen machten 1 Mine und 60 M. 1 Tal. Gellies schätzt die 4000 Talente, die Pericles nach und nach auf bestimmte Kunstwerke verwendete, auf 7 Millionen Pfund Sterling.

II.

Neuere Maße.

I.

Neues französisches Maß- Gewichts- und Münz-System.

Mit dieser neuen Maß- und Gewichts-Einrichtung ist durchaus die Bequemlichkeit des dekadischen Zahlengebäudes verbunden. Das Wissenswürdigste davon mag hier voran stehen.

Der Kreisumfang ist in 400 gleiche Theile oder Grade (sonst in 360°), folglich dessen 4ter Theil, oder Quadrant in 100° (sonst in 90°), der Grad in 100 Min. (so in 60′) und die Min. in 100 Sek. (sonst in 60″) getheilt. Daher ist ein neuer Dezimalgrad = 54 Sexagesimalminuten; eine Dezimalminute = 32″, 4; eine Dez. Sek. = 0″, 324. Und umgekehrt ein Sexagesimalgrad = 1, 11111 Dez. Gr.; eine Sex. Min. = 1′,851851; eine Sex. Sek. = 3″,086419. Der dem Halbmesser des Kreises gleiche Bogen 57°,2957795 = 63°,6619772 nach der Dezimaleinth. Der Quadrant des Seekompasses ist in 10 Windstriche, und jeder Strich wieder in 10 Dezimalgrade getheilt.

Den astronomischen Tag theilen gegenwärtig die Franzosen in 10 Stunden, die St. in 100 Min., die Min. in 100 Sek. u. s. w. Daher eine Dezimalstunde = 2 St. 24′ der alten Uhrzeit; eine Dez. Min. = 1′26″,4 d. a. Uhrz.; ei-

ne Dez. Sek. = 0'', 864 d. a. Uhrz., und umgekehrt eine alte Stunde = 0 St. 41' 66'' 66''' Dezimalzeit; eine alte Minute = 69'' 44'''; eine alte Sekunde = 1'' 15''' 74'''' 07'''''. Die Länge des einfachen Dezimal-Sekunden-Pendels unter dem 50° (sonst 45°) der Breite ist jetzt = 2,28302 (neue) Pariser Fuß. Der Fall der Körper in einer solchen Sek. unter derselben Breite = 11,26625 P. Fuß. Die Thermometer-Skale wird in 100 Grade getheilt vom Gefrierpunkte bis zum Siedpunkte; dieser wird bey einem Barometerstande von 28 Zoll 1 Linie (760 Millimètres), und die Temperatur der Quecksilbersäule auf dem Gefrierpunkte vorausgesetzt.

Anmerkung. Der Anfänger willen bemerken wir kurz, daß sie, um obige Reduktionen verständlich zu finden, nur die Ketten-Regel zu Hülfe nehmen dürfen. Wir wollen die neue Eintheilung nur durch n und die alte durch a bezeichnen: daß nun 1) 1° (n) = 54' (a); 2) 1' (n) = 32'', 4 (a); 1'' (n) = 0'', 324 (a) sey, leuchtet so ein:

I.			II.	
x' a	1° n.		x'' a	1' n.
100° n	90° a.		100' n	54' a.
1° a	60' a.		1' a	60'' a.

III.

32'', 4 : 100 = 0'', 324 u. s. w.

Uebrigens kam die vorgeschlagene Kreiseintheilung in Praxi nicht zu Stande.

Dieß vorausgeschickt, heißt die Grundeinheit des Längenmaßes Mètre (Elle), der zehnmillionste Theil des Erd-Meridianquadranten, welcher Theil nach dem alten Maße = 3 Fuß, 11 Linien und 296 tausendtheilchen einer Linie, oder genau = 443,295936 Par. Lin. = 3',078444 (nach dem definitiven Mètre; der provisorische war = 3,079458 des alten Par. Fußes). Jener Quadrant zu 100° hält 5130740 Toisen (a. M.)*), daher der mittlere neue Grad = 100000

*) Toise, oder Klafter, = 6 Schuhen.

Mètres = 51307,4 Toiſ., die Minute = 1000 Mètres = 513,074 T. Die letzte Zahl iſt auch die Abtheilung der Logleine auf den Schiffen, nämlich eine Abtheilung der Knoten hält 10 Mètres oder 30,785 alte Par. Fuß, da ſie ſonſt $47\frac{1}{2}$ hielt.

Auch die Meßkette hält 10 Met. und heißt Decamètre, oder Ruthe. (n. M.) = 30,78444 Fuß; 100 Decam. machen ein Kilomètre, 10 Kilom. (= 10000 Mètres) machen ein Myriamètre, oder eine Meile (n. M.) = 30784,44 Fuß, = 100 Hectomètr., da 1 Hectom. = 100 Metr. iſt.

Den Mètre theilen die Franzoſen in 10 gleiche Theile, welche ſie Decimètres (palmes, Handlängen, welche an die Stelle der Fuße kamen), nennen; die 10 gleichen Theile des Decimètre heißen Centimètres oder Zolle (doigts), die 10 gleichen Theile von dieſem Maße heißen Millimètres oder Linien (traits).

Die Einheit des Flächen- oder Feldmaßes heißt Are, oder Quadratruthe (perche carrée), d. i. der quadrirte Decamètre = 100 Mètres carrés = 947,6817461136 par. Quadratfuß, oder = 26,3244929476 Quadrattoiſen (a. M.) 100 Ares machen einen Hectare oder Morgen, Arpent (n. M.) = 2632,45 Quadrattoiſen (ſonſt nur = $1344\frac{4}{9}$, und zu Paris = 900), demnach beynahe das doppelte des alten Weier- und Waldmorgens, nämlich 10, 100, 1000, 10000 Ares heißen Decare, Hectare, Kilare, Myriare. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ aber vom Are heißen Déciare, Centiare, Milliare.

Die Einheit des Hohlmaßes zu trocknen und flüſſigen Waaren heißt Litre (pinte) der cubirte Decimètre; er iſt am Inhalt einem Würfel gleich, deſſen Seite $\frac{1}{10}$ Mètre beträgt; ein kubirter Mètre heißt Stère, deſſen man ſich bey größeren Dingen z. B. Holz bedient. Der Litre hält 0,029173852 par. Kubikf. oder 50,412416 Kubikzolle (a. M.) *). Das

*) Hr. Chelius ſetzt in ſeiner „zuverläßigen Vergleichung ꝛc." unrichtig: 50,41243. Die wahren ganzen Zahlen ſind: 0,0291738518523293352384 u. 50,4124160008251209 19552.

Maß für flüßige Dinge war sonst Cade, oder pinte = $\frac{1}{1000}$ Cade. Vom Litre heißt $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, Decilitre, Centilitre, Millilitre; hingegen 10, 100, 1000, 10000 Litres heißen: Decalitre, Hectolitre, Kilolitre, Myrialitre. Hieraus erhellt, was Dècastère, Hectostére, Myriastére bedeuten.

Die Einheit des Gewichtes heißt Gramme (Denier, Skrupel), und ist das absolute Gewicht des destillirten Wassers (im Zustande seiner größten Verdichtung) in einem Würfel, dessen Seite $\frac{1}{100}$ Mètre beträgt. Die Schiffstonne oder Stere des destillirten Wassers hält 2043 Pfund (a. M.), sonst 2000, 1 Gramme ist genau = $\frac{1}{489,1058}$ Par. Pf. oder = 18,82715 Grains des alten Par. Pf., welches nämlich 9216 Grains enthielt, indem das Pf. in 16 Unzen, 1 U. in 8 Gros, und 1 G. in 72 Grains getheilt war; aber der neue Livre (Kilogramme) ist = 2 Pf. 0 Unz. 5 Gros, 35,15 Grains, od. 18827,15 Grains dieses alten Gewichtes.

Aus den obigen Benennungen der aufeinanderfolgenden Maße sind folgende Ausdrücke von selbst verständlich: Decagramme, Hectogramme, Kilogramme, Myriagramme, — Decigramme, Centigramme, Milligramme u. s. w.

Kilogramme (Livre, Pfund) = 280242 kölln. Richtpfenn.; Hectogramme (Once, Unze) = 0,1 Livre = 10 Gros = 28024,2; Decagramme (Gros, Quentchen) = 0,1 once = 10 deniers = 2802,42; Decigramme (Grain, Gran) = 0,1 denier = 28,0242; Centigramme = 0,1 Grain = 2,80242; Milligramme (Aß) = 0,28242 jener Richtpfenn.

Anmerkung. Zur Erläuterung der in diesem Maß- und Gewichtssystem gebrauchten Ausdrücke bemerken wir noch: die Einheiten der genannten Maße und Gewichte sind 1) Mètre; 2) Are; 3) Litre; 4) Stère. Von jeder dieser Grundmaße und Gewichte hat man niedere und höhere Einheiten genommen, so, daß eine höhere Einheit jedesmal 10 niedere Einheiten in sich begreift. Diese Einheiten sind durch Zusammensetzungen des Wortes, welches die Grund-

einheit bezeichnet, mit Griechischen und Lateinischen Zahlwörtern bezeichnet. Jene Zahlwörter sind Μυρια (10000); Χιλια (1000); Ἑκατον (100); Δεκα (10); diese sind decem (10), centum (100) und mille (1000), um nämlich den 10ten, 100ten u. s. w. Theil des Maßes oder Gewichtes anzuzeigen.

Die Münzeinheit ist eine Silbermünze, Franc d'Argent genannt (= $\frac{1}{100}$ Kilogr. = 188,2515 grains), hat 5 Grammes am Gewichte (1401 Richtpfennigtheilchen), und beträgt 1 Livre 3 Deniers nach dem alten französischen Münzfuße; daher 80 Francs = 81 ehemaligen Livres. Der Zusatz (Alliage) ist $\frac{1}{10}$, daher hält ein Franc d'Argent in feinem Silber $4\frac{1}{2}$ Grammes ($1264\frac{1}{2}$ Richtpf.) und 25 Francs sind = 29 Vier und zwanzig Kreuzerstücke. Der Franc wird in 10 Decimes, 1 Dec. in 10 Centimes abgetheilt. 1 Franc ist genau = 27 kr. 3 pf. 0,75 Hl., 1 Dec. = 2 kr 3 pf. 0,275 Hl. und 1 Cent. = 1 pf. 0,2275 Hl. Gleichwie nun erlaubt wurde, daß für den Franc d'argent, dessen Gehalt genau $\frac{9}{10}$ fein seyn sollte, das sogenannte Remedium (Ueber- oder Untergehalt) zwischen 0,907 und 0,893 fallen dürfe: eben so wurde auch rücksichtlich der 5fachen, doppelten und halben Silberfrankenstücken, welche genau den halben, doppelten, 5fachen Gehalt des vorigen Franks haben sollten, festgesetzt, daß eine jede jener Münzen mit einem Ueber- oder Untergewicht von höchstens $\frac{5}{1000}$ des ganzen vorgeschriebenen Gewichtes, und mit einem Ueber- oder Untergehalte an feinem Silber von $\frac{7}{1000}$ des ganzen Gehaltes annehmbar sey.

Bey den alten französischen Goldmünzen war der Gehalt 23 Karat 7 Grän fein und der Zusatz 5 Grän. Allein nach dem neuen metrischen System sind in einer Kilogramme münzfähigen Goldes, woraus die vorigen Francs d'or oder Napoleons-d'or zu 20 Francs gemünzt wurden, 983 Grammes fein Gold und 17 Gr. Zusatz; so wie im Silber, die Laubthaler 10 Pfenning (Liard) und $23\frac{1}{4}$ Grän fein, und an Zusatz 1 Pfg. $\frac{1}{4}$ Grän, die Franks 916 Gram. fein und 84 Gr.

Zusatz, die Kilogramme, ausgemünzt werden. Die Goldmünze hatte anfänglich ein Octogramme d'or = $15\frac{1}{2}$mal des Gewichtes vom Silber, mit dem Zusatz $\frac{1}{10}$, seyn, und 25 Francs d'argent gelten sollen. Allein dieß wurde abgeändert, und es wurden dafür bisher 3ley Goldmünzen geprägt: 1) der genannte Franc d'or oder Napoleons-d'or (das Stück = 20 Francs wiegt $6\frac{2}{5}$ Grammes, und hält 5,76 Gr. fein Gold; der Werth also = 4 Rthlr. 20 Grosch. $7\frac{1}{2}$ Pf. in Passierpistolen à 5 Rthlr.): 2) die Marengos vom Jahre 9, vom gleichen Werthe mit den vorigen; 3) die Napoleons-d'or von 40 Francs, überhaupt das Doppelte der vorigen Münze.

Das Gewicht der im Umlauf befindlichen Kupfermünzen von 2, 3 und 5 hunderttel Franken ist: 4, 6, 10 Grammes.

Aus dieser kurzen Darstellung des neuen französischen Maß-Gewichts- und Münz-Systems erhellt, daß das Prinzip oder die Basis desselben der Mètre ist.

Die bey dieser Darstellung mitgetheilten Reduktionen des neuen französischen Maßes und Gewichtes auf das ehemalige dienen nicht nur, um sich einen deutlichen Begriff von dem neuen Maße und Gewichte zu verschaffen, sondern sie sind auch in sofern nützlich, in wiefern dieses neue franz. Maß- und Gewichts-System zur Vergleichung der in verschiedenen Ländern gebräuchlichen Maße und Gewichte angewendet wird, so wie man sich hiezu ehemals des Pariser Fußes (Pied du Roi) von 144 Linien zur Vergleichung des Längenmaßes, des Par. Quadratfußes zur Vergleichung des Flächenmaßes, des Par. Kubikfußes oder Kubikzolles zur Vergleichung des Hohl- und Körpermaßes, und entweder der Pariser Grains, wovon 9216 auf ein Pfund (Poids de Marc), oder des Holländ. Troysgewichtes, wovon 1 Pfund 10240 Aßen hält, zur Vergleichung der Gewichte beynahe an jedem Orte des cultivirten Theiles unserer Erde bediente, und zum Theile noch bedient. Wir werden unten einige Reduktionen dieser Art mittheilen.

Anmerkung 1. Die Basis dieses metrischen Systems betreffend, bemerken wir noch folgendes:

1) Die provisorische Größe des Meter = 443,441952 alt franz. Lin. war nach den früheren Meridianmessungen der franz. Akademiker Cassini des zweyten, Maraldi, de la Hire und de la Caille bestimmt worden, indem nach diesen Messungen der Grad des Meridians 57027 Toisen im Durchschnitt hatte. Allein die Messung des Breitengrades zwischen Dünkirchen und Barcelona von Mechain und Delambre gab jenen nur = 57008 Toisen (a. M.), daher wurde der definitive Meter = 443,295936 alt franz. Lin. gesetzt.

2) Gegen diejenigen, welche dieses metrische System aus dem Grunde besonders anpriesen und vertheidigten, weil der Meter, oder die Basis dieses Systems, eine unveränderliche, unverlierbare, bey jedem entstehenden Zweifel, oder nach neuerfundenen, wo möglich, noch feineren und richtigeren Kunstgriffen der höheren Meßkunst immer von neuem meßbare Größe sey, erhoben mehrere von Zeit zu Zeit ihre Stimme, indem sie die Richtigkeit der Gradmessung in Anspruch nahmen. Allein von dieser Seite steht das metrische System meiner Ueberzeugung nach fest, fest durch die, ich möchte sagen, beyspiellosen Anstrengungen französischer Meßkünstler vom ersten Range. Durch diese wurde die Gradmessung von Montjouy bey Barcellona bis auf die kleine balearische Insel Formentera im mittelländischen Meere, deren Breite, durch 2558 Beobachtungen des Polaris, = 38° 39′ 55″, 16 gefunden wurde, fortgesetzt. Demnach beträgt nun die Größe des gemessenen Bogens (amplitudo arcus) von Dünkirchen bis Formentera in Dezimalgraden 13°, 744875, oder, nach der 60theiligen Eintheilung der Kreislinie, 12° 22′ 13″, 32. Da nun der definitiv Metre nach Mechain's und Delambre's Messungen zu 433‴,296 bey + 16°,75 therm. centigr. bestimmt wurde, jeder Dezimalgrad aber der als vollkommne Kugel angenommenen Erde = 100000 Meters ist: so

beträgt der Abstand Dünkirchens von Formentera 1374487,5 Met., oder, die Abplattung der Erde nach der Mondstheorie zu $\frac{1}{301}$ angenommen, demnach 48,37 Met. abgezogen, 1374439,13 Met. Nun gaben genaue trigonometrische Messungen jenen Abstand = 1374438,72 Met., es beweist daher die kleine Differenz 0,41 eine ausserordentliche Harmonie solcher äußerst schwierigen Operationen, und mit Rücksicht auf jene Differenz den Meter bestimmt, würde dessen Länge 443, 2958 par. Lin.; der Unterschied also zwischen diesem und dem definitiven Meter nur $\frac{2}{10000}$ seyn. Hieraus erhellt offenbar, daß die Länge des Meter unbestreitbar richtig bestimmt ist (vergl. monatl. Corresp. May 1809).

Anmerkung 2. Daß dieses neue franz. Maß- und Gewichts-System überdieß alle Vortheile der Dezimaleintheilung mit seinen übrigen Vorzügen bey praktischen Rechnungen vereinige: wollen wir nur noch kurz durch folgende Momente erörtern.

1. In Betreff des Numerirens braucht man nicht zu sagen oder zu schreiben z. B. 1 Dekameter 5 Metre 3 Decimetres 7 Millimetres, sondern man sagt und schreibt 15307 Millim., oder will man höhere Einheiten haben, 153,07 Decim., oder 15,307 Metre, oder 1,5307 Dekam.

2. Man hat nirgends einer beschwerlichen Resolution und Reduktion nöthig: z. B. es seyen zu addiren

4 Dekam. = 40,00 Metres
3 Centim. = 0,03 M.
15 Decim. = 1,50 M.
Sum. = 41,53 Met. = 4153 Centim. u. s. w.

Eben so bey der Subtraktion.

3. Man soll 13 Decimetres mit 11 Dekamet. multipliziren. Hier hat man 1,3 Met. × 110 Met. = 143 Met. = 14,3 Dekam.

4. Man soll 7 Dekam. dividiren durch 5 Decim. Hier ist 70 Met. : 0,5 Met. = 700 : 5 = 140 Met. — Man hat also weder bey der Multiplikation, noch bey der Division einen Generalnenner aufzusuchen.

Anmerkung 3. Hier ist nun der Ort, wo wir noch einige Worte über die Vorzüge der verschiedenen Zahlensysteme, deren wir in der Einleitung mehr geschichtlich erwähnt haben, und der zehn- und 12theiligen Eintheilung sagen müssen.

Man hat sich in neueren Zeiten bey Gelegenheit der durchgängigen Einführung der 10theiligen Eintheilung im vorigen französischen Kaiserreiche viel über den Werth dieser Eintheilung im Vergleiche mit der 12theil. Eintheilung gestritten. Diejenigen, welche für die letztere durchaus stimmten, indem diese Eintheilung uns Halbe, Drittel, Viertel und Sechstel gebe, während die 10theil. nur Halbe zulasse, erhoben zugleich auch, ganz konsequent, ihre Stimme für das Taun- oder Zwölfzahlensystem, indem nach ihm die 12theil. Brüche auf gleiche Art, wie die ganzen Zahlen, behandelt werden könnten, so, daß man der 12th. Eintheilung zu Gunsten der 10theiligen nicht weiter mehr den Vorwurf der schwereren Behandlung machen könne. Für dieselbe Sache führt man an, daß die ältesten, uns bekannten, und kultivirten Völker, wie wir oben wirklich gesehen haben, die 12theil. Eintheilung wenigstens der Hauptsache nach gewählt haben.

Wenn wir nun gleich zugeben, daß obigem Räsonnement von Seite der Theorie nichts entgegenstehe: so müssen wir doch bekennen, daß es an der Klippe der Praxis gänzlich scheitere. Es handelt sich nämlich von der Einführung des Taunsystems an der Stelle der Dekadik, welche ebenfalls von den ältesten Völkern bis herab auf die gegenwärtigen Generationen als natürlich und leicht angenommen und gepriesen ist. Wenn die Vertheidiger des Taunsystems darin einen Beweis für ihre Meinung finden wollen, daß die franz. Regierung neuerlich die 12theilige Eintheilung neben der 10theiligen rücksichtlich einiger Maße gestattete, oder wegen des praktischen Nutzens bey dem gemeinen, einmal an die 12th. Theilung gewöhnten, Volke gestatten mußte: so bekennen sie hiemit zugleich die große Schwierigkeit, ich möchte sagen, die Unmöglichkeit der Ausführung ihres Vor-

schlages ein, die allgemein, von Gelehrten und Ungelehrten, gebrauchte und gewohnte Dekadik durch die Dodekadik zu verdrängen.

Dieses vorausgesetzt, kann in der That das immerwährende, und nur Einseitigkeit beweisende, Anpreisen der 12theil. Eintheil. zu nichts weiter führen, als daß man bey den Entwürfen für neue Maß- und Gewichtssysteme in einem Lande die hergebrachte 12theil. Theil. nicht geradezu verwerfe, und wider alle Gewohnheit durch die plötzliche, durchgängige Einführung der 10theil. Theil. verstoße.

Wenn es aber ferner nur um die Einführung eines neuen Zahlensystems zu thun wäre: so würde, wie schon Leibnitz bemerkt hat, das Sechzehnziffrige mehr noch, als das 12ziffrige System, und dann eben so die 16theilige Eintheilung mehr noch, als die 12theilige dem gepriesenen Vortheile wegen der Theiler zusagen. Denn diese Eintheilung nach 16 läßt Halbe, Viertel, Achtel und Sechzehntel, d. i. immer stufenweise doppelt kleinere Theile zu.

Angenommen endlich, daß es nicht leicht möglich ist, das so allgemein rezipirte, mit sovielen Rechnungsvortheilen verbundene dekadische System gegen irgend ein anderes umzutauschen: so ist es unläugbar wahr, daß auch die 10theil. Eintheilung, welche in der Natur und dem Wesen jenes Systems liegt, und mit demselben gegeben ist, die natürlichste und für die Rechnung allerleichteste sey. Eben darum ist auch das Erlernen der ganzen Dezimalrechnung nicht schwerer, als das Erlernen des Rechnens mit anderen Zahlen. Ein jeder kann sich hievon überzeugen, sobald er jene Rechnung lernt oder lehrt nach der Art, wie ich sie in diesem Buche, und in der kleinen Schrift „die gemeine Rechenkunst für Bürger- und Sonntagsschulen" abgehandelt habe. Und sollte es denn so sehr schwierig seyn, sich daran zu gewöhnen, statt z. B. $\frac{1}{2}$ Schuhe oder 6 Zoll zu sprechen 5 Zehntelsschuh, oder 5 Zoll, und zu schreiben: 0,5? eben so: statt $\frac{1}{4}$ Fuß oder 3 Zoll zu sprechen 25 Hundertelsfuß und zu schreiben: 0,25? und um-

gekehrt? Wahr ist's, nach der 10theiligen Eintheilung hat man nicht ganz genau Drittel und Sechstel; aber dafür hat man nach derselben in 10theil. Brüchen ganz genau stufenweise herab $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ (= 0,125), $\frac{1}{16}$ (=0,0625), $\frac{1}{32}$ (= 0,03125) u. s. w.

Wenn demnach wir Teutsche uns noch immer gegen die Dekadik und die 10theilige Eintheilung durchaus stemmen wollten: so würde dieses nicht klare Einsicht, sondern nur Vorurtheil gegen fremdes Verdienst beweisen.

Anmerkung 4. Eine der vorzüglichsten Schriften über diesen Gegenstand ist Brussons instruction sur les mesures et poids nouveaux. An. VIII. Brusson sagt in dieser Schrift, daß nach den neuesten Versuchen ein Kubikmetre destillirten Wassers im luftleeren Raume (l'eau etant amenée au maximum de sa densitè dans le vide) 2042 Livr. 14 onc. 0 gros 14 grain gewogen habe. Dieser größte Grad von Dichtigkeit des Wassers hat nach Hrn. von Zach's geogr. Ephemeriden statt bey + 3°,2 des Quecksilberthermometers mit reaumürschen Skale. Das Gewicht eines solchen Kubikmetre's destillirten Wassers nennen die Franzosen bar.

Aus obigen Versuchen folgt, daß, weil 1 Metre cube = 29,1738518523293523 84 altpar. Fuß, und 1 Livre = 9218 Grains ist, der Kubikfuß destillirten Wassers, im Zustande seiner größten Dichtigkeit, 645343,306 Grains, oder 70,024 altfranz. Pfund wiege.

2.

Neue Maße und Gewichte im Königreiche Baiern.

Durch ein königliches Dekret (München den 28. Febr. 1809) ward festgesetzt:

1) Für das Längenmaß ist der altbaierische Fuß die Einheit nach der Duodezimaleintheilung, wo 1′ = 12″ u. s. w. ist. Er ist bey + 13° Reaumür = 129,38 par. Lin. die Klafter = 6′; geometrische Ruthe = 10′; Elle = 2′ $10\frac{1}{4}$″ = 369,27 par. Lin.

2) Für das Flächenmaß ist der Quadratfuß die Einheit, er ist = 144□″; 1□Ruthe = 100□′; ein Tagwerk (Morgen, Juchert) = 400□ Ruth. = 40000□′;

3) für die Flüssigkeit ist die Maßkanne die Einheit, = 43 baierische Dezimalkubikzolle; 1 Eimer = 64 Maß = 2 Kubikfuß und 752 Dezimalkubikzolle. Hr. Prof. Schiegg, welcher im J. 1806 in Gegenwart einer Commission der kön. baier. Landesdirektion das Mutterschäffel untersuchte, fand durch wiederholte Versuche, daß eine baier. Maß Brunnenwasser (aus dem weißen Brauhause zu München) bey + 7 Reaum. genau 14560 Gran baier. Gew. wog;

4) für das Getreidmaß ist der altbaier. Metzen die Einheit. Weil nach Hrn. Prof. Schiegg's Untersuchungen das baier. Mutterschäffel (ein kupferner abgekürzter Kegel) 207,722 baier. Maße jenes Wassers, von dem vorhin die Rede war, hielt, indem dieses 3024434 Gran wog, man aber wegen des unebenen Randes des Schäffels bemerkte, daß sich leicht noch $\frac{1}{4}$ Maß Wasser werde zugießen lassen; so setzte die Kommission fest, daß der Inhalt des Schäffels zu 208 Maße, oder zu 8 Kubikfuß und 944 baier. Dezimalkubikzolle (= 15455,232 baier. Duodezimalkubikzolle = 11209,598 altfranz. Duodezimalkubikzolle) anzunehmen sey. Nun ist das Schäffel ein Sechsmetzenmaß, demnach hält der Metzen (als Einheit) $34\frac{2}{3}$ baier. Maßkannen.

Nach diesem Maße werden alle Getreidarten gemessen; sonst betrug 1 Haberschäffel $\frac{7}{6}$ Korn- oder Weitzenschäffel, d. i. man maß den gewöhnlichen Schäffel, und gab noch einen gewöhnlichen Metzen dazu. Es hatte also das Haberschäffel 13077,864 par. Kubikzolle, und 1 Metz. = 2179,644 Kubikzolle.

5) Für das Gewicht ist das bisher übliche Münchner oder baier. Pfund die Einheit; 1 ℔ = 32 Loth = 560 grammes des neufranz. Gewichtes; 1 Zentner = 100 ℔.

6) Das nürnberg. Medizinalgewicht wurde einstweilen in allen baier. Apotheken geltend erklärt, aber späterhin, wie ich gleich anführen werde, wurde auch ein solches Gewicht gesetzlich eingeführt;

7) rücksichtlich des Münzfußes bleibt es bis auf weitere Verordnung bey dem bisherigen Konventionsfuße.

In dem königl. baier. Regierungsblatte vom J. 1810 St. XIV wurde der auf den 1ten Januar d. J. festgesetzte Termin der Einführung dieser neuen Maße und Gewichte bis zum 1ten Oktober desselben J. verlängert.

Ich habe unten, nach der Darstellung der Würzburger Maße und Gewichte, einige Vergleichungstafeln entworfen, wobey ich die im königl. baier. Regierungsblatte vom J. 1809 angegebenen Reduktionen der baierischen Maße und Gewichte in die neuen französischen benützte, oder vielmehr zu Grunde legte.

In Beziehung auf 6) muß ich noch bemerken, daß wahrscheinlich die noch immer zwischen 7438 und 7457 holländischen Aßen = 1 Nürnberger Pf. Medizinalgewicht schwankenden Angaben die königliche baier. Regierung veranlaßten, durch eine allerhöchste Verordnung vom 30ten Januar 1811 ein eigenes Medizinalgewicht im Königreiche einzuführen. Das Pfund dieses Gewichtes ist = 360 neufranz. Grammes = 100887,12 kölln. Richtpfenninge = 7487,7409 holl. Aßen.

3.

Maße und Gewichte in Würzburg.

a) Fußmaß.

Ein Fußmaß, das mit ganzer Gewißheit als matrix oder Muttermaß, angesehen werden könnte, haben wir hier

leider! nicht mehr. Ich untersuchte indessen 4, in dem Lokale der Polizeydirektion aufbewahrte, Maßstäbe, die gewissermaßen die Stelle eines Urmaßes vertreten können, nämlich:

α) einen hölzernen Maßstab, eine Fußsohle vorstellend, vom J. 1606 aus Holz;

β) eine eiserne Elle zu beyden Seiten vertikal aufgebogen; die Aufbüge mit Einschnitten;

γ) eine andere, die Aufbüge ohne Einschnitte; die Theilung beyder Ellen ist roh, und sehr schlecht;

δ) einen Fußmaßstab von Hrn. Assessor Albert dahier, so wie sich jene Fußlänge auf seiner, wenigstens 40 Jahre alten, Feldmesserruthe findet, und welche von einer noch älteren Ruthe entlehnt ist.

Die Fußmaße unter α und δ stimmten beynahe exakt miteinander, eben so die 2 eisernen Ellen; die rohe Arbeit und das ungleiche Umbiegen der Enden verursacht eine kaum merkbare Differenz. Mit Hilfe eines Stangenzirkels und altpar. königl. Maßstabes untersuchte ich nun alle 4 genannten Fuß- und Ellenmaße, und fand, daß, wenn ich die Fußsohle unter α) ganz genau zwischen den Spitzen des Stangenzirkels von außen faßte, eine Länge erhalten wurde, welche zweymal in der inneren Länge eines jeden der 2 eisernen Ellenmaße enthalten war. Aus diesem Uebereinstimmen schloß ich, daß die hölzerne Fußsohle gleichsam als Urmaß dienen könne, inwiefern sie von außen gefaßt wird. Wurde gleich zu derselben etwa beym Schneiden sehr trockenes Holz gewählt: so muß man doch annehmen, daß sie sich in der Folge noch um etwas weniges verkürzt habe, daher faßte ich sie, aber sehr genau, zwischen den Spitzen des Stangenzirkels in gerader Linie von außen. Ich setzte nun den Stangenzirkel auf den genannten 10000theiligen par. Maßstab, und fand, daß die Länge 8990[lv] oder Skrupel austrug, der Würzburger Fuß also = 129,4560 altfranz. Lin., und die Elle = 2 solcher Füße = 258,9120 jener Linien sey.

Der Maßstab von $1\frac{1}{2}$ par. Fuß ist nämlich so getheilt, daß 1 Fuß = 10 Zoll, $1'' = 10'''$, und $1''' = 100^{IV}$ ist, also der Fuß 10000 Skrupel hält. Da nun aber nach der gewöhnlichen Theilung $1' = 12''$, $1'' = 12'''$ und $1''' = 10^{IV}$ ist, der Fuß also $144'''$ oder 1440^{IV} hält: so muß man, um die mit Hilfe jenes Maßstabes gefundene Zahl von Skrupeln, auf eine gleiche Zahl nach der letzteren gewöhnlichen Theilung zu reduziren, jene Zahl mit 1440 multipliziren, und das Produkt durch 10000 dividiren. Dadurch wird jene Zahl $8990^{IV} = 1294{,}56^{IV}$ nach dieser Einth., oder $= 129{,}456'''$.

Mein erhaltenes Resultat stimmte bis auf die kleine Differenz $= 0{,}064'''$ mit der gewöhnlichen Angabe des hiesigen Fußes zu 129,52.

Anmerkung 1. Ob nun gleich auf dem von mir, als ächten altfranz. königl. Fuß, gebrauchten und ebenfalls bey der hiesigen königl. Polizeydirektion aufbewahrten 10000th. Maßstabe nicht angegeben ist, für welchen Wärmegrad er gelten solle: so war mir dieses doch kein hinlänglicher Grund, mich desselben nicht zu bedienen, indem er nach seiner Aufschrift cura et opera Prof. Huberti 1772 mit einer ganz vortrefflichen Theilung und zu dem Ende gefertigt ist, um im Besitze des wahren Maßstabes zu seyn, nach welchem Huberti seine Matrizen fertigen ließ, und seine Angaben über die übrigen Würzburger Maße beurtheilt werden sollen.

Allein als ich späterhin jenen Maßstab mit einem, im hiesigen physikalischen Cabinete befindlichen, eisernen Etalon einer pariser Toise, welcher sorgfältig in 6 Fuße getheilt ist, gelegenheitlich verglich, fand ich, daß Huberti's Maßstab den königl. Fuß zu klein gebe. Dasselbe Resultat erhielt ich, da ich denselben Maßstab mit zwey anderen, sehr gut gearbeiteten, Maßstäben des Hofmechanikus, Hrn. Hauptmanns Dumonceau, in dessen Gegenwart verglich. Es ergab sich, daß Huberti's Maßstab um $\frac{1}{10}$ Lin. des wahren königl. Fußes zu klein sey.

Erst nach Endigung dieser Untersuchung fand ich im 2ten Theile des vom großh. badischen Hofrathe Hrn. Wild mit eben so vielem Fleiße, als Scharfsinn und Sachkenntniß ausgearbeiteten, äußerst lesenswerthen Buches „Ueber allgemeines Maß und Gewicht rc.“ (Freyburg 1809) die Bestättigung meines gefundenen Resultates im Allgemeinen. Hr. Wild sagt nämlich S. XII., daß er jenen fraglichen Maßstab von $1\frac{1}{2}$ par. Fuß um 0,00044 Meter zu klein gefunden habe. Demnach wäre der par. Fuß auf dem Hubert'schen Maßstabe um 0,195 . . ., oder beynahe um $\frac{1}{5}$ par. Lin. zu klein. Hieraus folgt, daß die von mir nach meinem Resultate verbesserten Hubertschen Zahlen noch eher etwas zu groß, als zu klein sind.

Es sind demnach alle nach Huberti's Maßstab gemachten Angaben zu hoch.

Also giebt dieser Maßstab statt der wahren Länge des königl. F. = 144 Lin., nur die Länge von 143,90 . . . Lin. Man findet folglich mittels der Proportion: wenn 144‴ nur 143,90‴ . . . sind: wieviel sind die oben aufgefundenen 129,456 Lin.? Daß

1. der Würzb. Fuß = 129,3661 und
2. die Würzb. Elle = 258,7322 par. Linien seyen.

Hierauf beziehen sich denn in der Folge die von mir angegebenen Berichtigungen der übrigen Maße.

Anmerkung 2. Die Elle, wie man sich derselben in Würzb. wirklich bedient, ist = 260,8704, und durch Berichtigung = 260,68924 par. Lin., demnach beynahe um 2 solcher Linien zu groß. Dieses rührt von dem alten, sonderbar eingeführten und kaum zurechtfertigenden Gebrauche her, jedes abzugleichende Ellenmaß mit dem einen Ende auf die innere Fläche des oben unter β) genannten Muttermaßes, das andere Ende aber auf den Umbug desselben zu legen, wodurch statt des Kathetus die Hypotenusa eines rechtwinkligen Dreyeckes zur Ellenlänge erhalten wird.

b) Ruthen- oder Feld- und Waldmaß.

Die Ruthe, womit in Würzburg Felder, Wiesen und Gärten noch gegenwärtig gemessen werden, hält 12 Würzb. Fuße, wobey man 160 Quadratruthen auf 1 Feldmorgen rechnet.

Allein alle Waldungen, so wie alle herrschaftlichen Feldgüter überhaupt, werden nach Befehl der vorigen Regierung mit einer Ruthe = 12 Nürnberger Fuß gemessen. Da nun sonst auf 1 Waldmorgen, in der Regel mit der Nürnb. Ruthe = 12' vermessen, 180 Quadratruthen gerechnet wurden: so wurde zugleich festgesetzt, daß 1 Waldmorgen, mit der neuen Ruthe gemessen, durchaus nur = 160 Quadr. ruthen seyn solle.

Der zum Behufe dieser vorgeschriebenen konstanten Ruthenlänge von Hrn. Hauptmann Dümonceau gefertigte, und an die hiesige Landesdirektion abgegebene, Etalon eines Nürnberger Fußes hat, bey Bemerkung des Wärmegrades, 134,65 par. Lin. Diese Annahme stimmt beynahe ganz mit der Angabe dieses Fußes zu 134,6540 Lin. im kön. baier. Regierungsblatte 1812 S. 1322.

Also 1 Waldmorgen = 20145,1361 ... altfranz. Quadrf., den F. = 134,6540 gesetzt = 21,2573 Ares = 21,258524 .. Ar., 1 Feldmorgen im Würzb. = 18595,09759 altfranz. Quadr. f. durch Berichtigung.

c) Holzmaß.

Wie es bereits vorher schon statt fand, wurde aufs neue verordnet (großh. würzb. Regierungsbl. J. 1811 XVIII. St. 6ten Nov.), daß das Klafter Brennholz 5 Fuß Höhe, nebst einem Scheit Uebermaß auf das Schwinden des Holzes gerechnet, 5 Fuß Breite und 3 Fuß Scheitlänge, — das Bund Wellen 3' Umfang und eben soviel Länge, — alles nach Nürnberger Werkmaß, haben solle.

Demnach hat wirklich das Klafter Brennholz 75 Nürnb. Kubikfuß, jenes Scheit Uebermaß nicht mitgerechnet, oder 2,1020245 Stères.

Mehrere im J. 1807 auf allerhöchstem Befehle von der damals großherzogl. Polizeydirektion angestellten Versuche haben aufs neue gelehrt, daß 10 Waldklafter beynahe 11 Karren, womit das Holz in die Stadt verführt wird, machen. Eine ganz genaue Ausgleichung ist hierin nicht möglich, theils wegen der verschiedenen Qualität des Holzes, theils wegen der verschiedenen Geschicklichkeit im Holzlegen. Das nach Karren verkaufte Holz hat übrigens keine bestimmte Scheitlänge; nach Verschiedenheit der letzteren ändern sich blos die Preise.

d) Getreidmaße.

Die hiesige Polizeydirektion besitzt gegenwärtig 2 Matricen von der Kornmetze, welche Huberti fertigen ließ; die eine ist ein zinnernes Prisma, die andere ein kupferner Cylinder. Den kubischen Inhalt hat Huberti in seiner bekannten Schrift: Vergleichung der Würzb. Fruchtmaße rc. 1777 genau angegeben.

Allein ich muß hiebey bemerken, 1) daß sich in der Einleitung jener Schrift ein Druckfehler vorfinde, indem die Kornmetze = 1095, . . . statt 1094 . . . gesetzt ist; — 2) daß ebendaselbst Huberti mehrere Würfelseiten angegeben habe, die nicht genau berechnet sind, daher zum Nachrechnen untauglich sind. Die einzig zum Nachrechnen geschickten Zahlen sind Huberti's Grundangaben des Inhaltes des obigen Prisma; nämlich die Höhe dieses Prisma ist, nach dem oben genannten 10000theil. par. Maßstab, = 7830 und der Quadratinhalt des Bodens dieses Gefäßes ist = 80891949 solcher Quadrattheilchen.

Demnach ist die von mir ganz genau berechnete Zahl für den kubischen Inhalt

Kornmetze = 1094,48748403776 altpar. Kub. zoll.

Huberti giebt zum Inhalte der Habermetze 1690,180 par. Kubikzoll. Allein er hat diese Zahl ebenfalls nicht genau berechnet; denn da sich nach seinen Angaben die Kornmetze zur Habermetze verhält, wie 1 zu 1,54427: so ist die

Habermetze = 1690,18148697499 16352 Kub. z.
Demnach wären beyde Inhalte sehr nahe so anzugeben:
Würzburg. Kornmetze = 1094,4875 par Kub. z.
- - - - Habermetze = 1690,1815 — —

Allein da dieser Bestimmung der fehlerhafte 10000theil. Maßstab zum Grunde liegt: so bedürfen diese Angaben noch einer Reduktion, oder Berichtigung, welche ich so finde: der Hubert'sche Kubikfuß giebt nur 2979767,519 Kubiklin., oder nur 1724,4025 Kubikzoll statt 1728 solcher Zolle, er ist folglich um 3,5979 Kubikzoll zu klein, daher 1 Hubert'scher Kub. zoll um 0,002081886 zu klein. Daher mußte Huberti den Inhalt jener Muttermaße zu hoch angeben. Wenn man daher die Hubert'schen Zahlen mit 0,0020 . . . multiplizirt, und das Produkt von jenen Zahlen abzieht: so erhält man nach dem 144theil. par. Fuße die wahre Größe jener 2 Muttermaße; nämlich Kornmetze = 1092,20888586757, Habermetze = 1686,6654161787 . . . par. Kubikzoll, oder kürzer und sehr nahe:

berichtigte Kornmetze = 1092,2089 Kub. z. = 21,66547 Litres.
- - - Habermetze = 1686,6654 Kub. z. = 33,45734 Lit.

So sind nun einmal diese Muttermaße dieses Inhaltes. Aber ich zweifle, ob Huberti sie von dieser Größe habe fertigen lassen wollen. Es ist daher sehr zu bedauern, daß er in seinen 10000theil. par. königl. Fußmaßstab (den wahrscheinlich Brander in Augsburg gefertigt hat) nicht das geringste Mißtrauen setzte, oder denselben einer genaueren Prüfung unterwarf.

Die Verschiedenheit des Hohlmaßes sowohl für flüssige als trockene Waare in den meisten Würzb. Orten dürfen wir hier als (aus den genannten Hubert'schen und anderen Schriften) bekannt voraussetzen. Wir bemerken nur noch, daß die Getreidmaße für glatte Frucht, Korn, Gersten rc. im Würzburgischen folgende Benennungen und Unterabtheilungen haben:

Malter	Achtel	Metze	Viertel	16theil. Mäßchen
1 Malt.	2	8	32	128
	1 Achtel	4	16	64
		1 Metze	4	16
			1 Viertel	4

Allein das Habermalter hat 12 Habermetzen, womit auch Dinkel gemessen wird. Diese Fruchtarten nennt man auch rauhe Frucht. Uebrigens ist die gemeine Annahme, daß 18 Kornmetzen 1 Habermalter ausmachen, an und für sich nicht richtig, indem 18 Kornmetzen beynahe 600 par. Kubikzolle weniger, als das wahre Habermalter machen. Aber sehr nahe machen $18\frac{1}{2}$ Kornmetzen 1 Habermalter aus. Am Gewichte schätzt man das Würzb. Kornmalter zu 230 Nürnb. Pfunden.

e) Flüssigkeits- oder Getränkmaße.

Das Würzburger Stadtaichmaß hat nach Huberti's genauer Untersuchung 59,1096 altpar. Kubikzoll, und das Fuder 45396,1728 dieser Zolle.

Allein angenommen, daß Huberti auch diese Zahlen mit Hilfe seines zu kleinen 10000theil. par. Fußmaßstabes gefunden habe: so wären die berichtigten Zahlen folgende:

Das Stadtaichmaß = 58,98654 par. K. z. = 1,17008 Litres.
Das Fuder = 45301,663 par. K. z. = 898,62114 Lit.

Mehrere Umstände, besonders aber das Interesse, welches wir gegenwärtig an einer richtigen Vergleichung unserer Maße mit den gesetzlichen königl. baier. Maßen nehmen müssen, und dann dieses, daß ich mich nicht mehr genau erinnern konnte, woher ich die angeführte Huberti'sche Angabe unseres Stadtaichmaßes genommen habe, bewogen mich, die von der königl. Polizeydirektion aufbewahrte Matrix des Aichmaßes (vom J. 1784) selbst zu untersuchen.

Das Resultat dieser, von mir am 28ten Septemb. 1814 mit aller Sorgfalt und möglichsten Genauigkeit angestellten, Untersuchung war unmittelbar folgendes:

Das destillirte Wasser, womit ich die genannte Matrix anfüllte, wog bey + 11°,5 der 80theil. Skale des reaum. Quecksilberthermometers und bey beynahe mittlerem hiesigen Barometerstande, in der Luft 2 ℔ 14⅜ Loth des hiesigen Leicht- oder Kramgewichtes (m. sehe unten unter g.).

Dieses Wasser wog also nach der Angabe sub g) 24312,561796875 holländ. Aßen, oder, da 5120 holl. Aß = 68985 kölln. Richtpfenn., 327578,530382309 kölln. Richtpf.

Nun hat aber die größte Dichtigkeit des Wassers nur bey + 3°,2 jenes genannten Thermometers statt, und nach einer von Herrn Chelius vermittels genauer Versuche entworfenen, und in seinem Buche „zuverläßige Vergleichung sämmtl. Maße und Gewichte der Handelsstadt Frankf. a. M. ꝛc. 1808" mitgetheilten Tabelle ist der Unterschied des Gewichtes des reinen Regenwassers (das vom destillirten nur unmerklich differirt,) bey + 3° und 11°,5 864 Aßen (wie es Hr. Chelius nennt), oder der 2388ste Theil des Gewichtes bey 3°, oder der 0,0004186te Theil des Gewichtes (= 1). Es würde demnach mein destillirtes Wasser bey + 3°,2 137,124 kölln. Richtpf. mehr gewogen haben. Für diesen Wärmegrad ist demnach das Gewicht des Wassers, womit die Aichmaß gefüllt war, = 327715,654382309 kölln. Richtpf.

Nun wiegt aber 1 Métre cube (= 1000 Decimètres cubes) destillirten Wassers bey + 3°,2 und im luftleeren Raume nach den neuesten Versuchen 2042 Livr, 14 once, 0 Gros, 14 Grains, oder 18827150 Grains des a. französ. Markgewichtes, oder 1 Decimétre cube wiegt im luftleeren Raume 18827,15 dieser Grains (das Gewicht des neufranz. Pfundes, oder Kilogramme), aber in der Luft nur 18803,95

Graine, oder 99876,7667381 Centigrammes, oder 279896, 648642186202 kölln. Richtpf. Es entspricht demnach dem Gewichte meines zur Anfüllung des Aichmaßes gebrauchten Wassers der kubische Inhalt

des Würzburger Stadtaichmaßes = 59,025163 par. Kubikz. = 1,170845 Litr.

Also der Würzburg. Einer à 64 Aichmaß = 3777,608704 par. Kubikz. = 74,93409 Litr.

und das Würzburger Fuder à 12 Eimer = 45331,304448 par. Kubikz. = 899,2091136 L.

Die Differenz zwischen dieser, durch eigene Untersuchung gefundenen, Angabe des kubischen Inhaltes unseres Stadtaichmaßes und der oben angeführten Hubertischen, nämlich die Differenz 0,074464 ist so klein, daß dieselbe leicht von einem mindergenau angestellten Calcul herrühren kann. Ich wollte übrigens von den oben angegebenen berichtigten Hubert'schen Zahlen keinen Gebrauch machen, weil die Matrix unseres Stadtaichmaßes so gefertigt ist, daß sie geometrisch nicht wohl genau ausgemessen werden kann.

Es hat übrigens folgende Theilung statt:

Fuder	Eimer	Achtel	Maß	Seidlein	Viermäßchen
1 Fuder	12	96	768	1536	3072
	1 Eimer	8	64	128	256
		1 Achtel	8	16	32
			1 Maß	2	4
				1 Seidlein	2

Durchaus werden auf 64 Aichmaße 72 Schenkmaße gerechnet.

f) Apothekergewicht.

Das Würzburger Apothekergewicht ist das Nürnberger Medizinalgewicht.

Die Eintheilung dieses Gewichtes kömmt weiter unten vor.

g) Handelsgewicht.

Wir haben in Würzburg ein doppeltes Handelsgewicht.

1) Das sogenannte Kramgewicht, womit alles, was unter 10 ℔, oder eigentlich unter $12\frac{1}{2}$ ℔ (einem halben Viertelszentner) wiegt, gewogen wird. Ein Muttergewicht besitzt eigentlich dieses Fürstenthum nicht; das einzige Gewicht, das als Matrice angesehen werden kann, besitzt die Familie Dörffer, gegenwärtig Hr. Dörffer, Goldarbeiter. Von diesem wird dieses Pfund Kramgewicht nach mehreren vorhergegangenen Untersuchungen so angegeben, daß $106\frac{7}{8}$ ℔, oder 106 ℔ und 28 Lothe Würzb. Kramgewicht 100 Nürnb. Pfunde, oder 1 Zentner seyen.

Man findet demnach durch folgenden Ansatz nach der Kettenregel:

x holl. Aßen	1 Würzb. ℔ Kramgew.
$106\frac{7}{8}$ ℔	100 Nürnb. ℔ Handelsgew.
1 Nürnb. ℔	142821 kölln. Richtpfenninge
68985 Richtpf.	5120 holl. Aßen

Das Würzb. ℔ Kram- oder Krämergewicht = 9918,1628 holländ. Aßen.

Hr. Salinenrath Baader in München, dem ich gelegenheitlich obiges Resultat mittheilte, hatte die Güte, mir zu antworten, daß er das Würzb. Kramgewicht zu 9927,26 holl. Aßen berechnet habe, indem er durch eine mühsame, aber einzig zuverläßige, Untersuchung das Nürnberger Handelsgewicht = 10609,763 holl. Aßen gefunden, und meine Angabe des Würzb. Kramgewichtes, nach welcher $106\frac{7}{8}$ ℔ 100 ℔ Nürnb. Handelsgewicht machen, zu Grunde gelegt habe.

Allein noch schätzbarer war mir die mitgetheilte Vermuthung des Hrn. Rathes Baader, ob nicht unser Krämergewicht das alte Nürnberger Silbergewicht seyn möge? Diese Vermuthung, welche schon aus dem Grunde sogleich meinen Beyfall hatte, weil das fragliche Gewicht seit langen Jahren Eigenthum der Goldarbeiters-Familie Dörffer ist,

wurde vom Hrn. Dörffer, den ich deßhalb fragte, auf der Stelle bestätigt. Was ferner mich verpflichtet, hier öffentlich dem genannten Hrn. Rathe meinen Dank abzustatten, ist dieses, daß derselbe mir seine, aus der unmittelbaren Ableitung des alten Nürnberger Medizinalgewichtes erhaltene Bestimmung jenes alten Silbergewichtes zu 9926,66 holländ. Aßen mittheilte.

Man findet demnach vermöge des folgenden Kettenansatzes:

1 ℔ Würzb. Kramgew.	100 ℔ Nürnb. Handelsgew.
1 ℔ Nürnb. Hand.gew.	10609,763 holl. Aß.
9926,66 holl. Aß.	1 ℔ Würzb. Kramgew.
9926,66	1060976,3 . . .

daß sich 106,881 Würzb. Krämerpfunde mit 100 ℔ Nürnb. Handelsgew. abgleichen. Dieses Resultat stimmt mit der oben gesetzten Angabe, daß $106\frac{7}{8}$ oder 106,875 ℔ Würzb. Kramgewicht 100 Nürnb. Handelspfunde machen, so genau zusammen, daß die Differenz (106,881 — 106,875 =) 0,006, wie auch der genannte Hr. Rath bemerkt hat, durchaus von keiner Zentnerwage angegeben werden kann.

2. Das andere in Würzburg übliche Gewicht ist das schwere, oder Frohngewicht. Dieses ist kein anderes, als das Nürnb. Handelsgewicht, wovon 100 ℔ = 1 Zntr. sind. Um mit diesem schweren Gewichte die zu kaufenden Waare eingewogen zu erhalten, pflegt man in Würzb. schwerere Dinge in ganzen, halben, viertels- und halben-viertels-Zentnern zu verlangen.

Es ist also, das neue franz. Pfund (Kilogramme) = 20799,29 holl. Aß. gesetzt,

1 ℔ Würzb. Kramgew. = 9926,66 holl. Aß. = 0,477259 Kilogr.
— — Frohngew. = 10609,763 - - = 0,510102 — —
1 Zentner dieses Gew. = 51,0102 Kilogr.

b) Vergleichungen

dieser Würzb. Maße und Gewichte mit den neuen, oben angeführten, Maßen und Gewichten des Königreichs Baiern, und beyder mit dem neufranz Maß- und Gewichtssysteme.

Baierisches) Würzburg.) Längenmaß.	a. systematische) b. populäre) franz. Benennung			
a.	Mètre	Decim	Centim	Millimétr
b.	- -	palme	doigt	trait
1 b. F.=12''=144'''=129,38 par. L.	—	2	9	1,859
1 w. — — =129,3661 —	—	2	9	1,827
1 nürnb. Fuß=134,6540 —	—	3	0	3,756
1 b. Klafter zu 6' . .	1	7	5	1,155
1 w. — — . . .	1	7	5	0,963
1 b. geom. Ruthe zu 10' .	2	9	1	8,592
1 w. — — zu 12' .	3	5	0	1,931
1 nürnb. — — — .	3	6	4	5,077
1 b. Elle zu 2' 10'' $\frac{1}{4}$.	—	8	3	3,015
1 w. — — 2' . . .	—	5	8	3,655

Flächenmaß.	Französ. Benennungen.	
a.	Are	Centiare
b.	perche carrée	metre carré
1 b. □Fuß zu 144 □Zoll .	—	0,08518
1 w. — — — — .	—	0,08516
1 nürnb. — — — .	—	0,09227
1 b. Klaft. zu 36 □Fuß . .	—	3,0665
1 b. □Ruth zu 100 □F. .	—	8,5182
1 w. — — 144□ - .	—	12,2635
1 nürnb. — — - .	—	13,2866
1 b. Tagw. zu 400 □R. .	34	67,2718
1 w. Morg. - 160 — .	19	62,1669
1 nürnb. — — .	21	25,8543

Es sind also 10 baier. Tagwerke etwas über 17 Würzb. Feldmörgen, mit der Würzb. Ruthe gemessen, aber beynahe gleich 16 Waldmörgen, mit der Nürnb. Ruthe, = 12' gemessen, wovon 1 Fuß genau gleich 134,65,0 par. Lin.

Baierisches) Würzb) Getreidmaß.	a. systematische) b. populäre) Benennung.		
a. b	Hectolitr. od. setier	Decalitre boisseau	Litre pinte
1 b. Metz. zu $34\frac{2}{3}$ b. Maßkan.	—	3	7,0596
1 w. Kornm.=1092,2089 p. Kz	—	2	1,6655
1 w. Haberm=1686,6654 - -	—	3	3,4573
$\frac{1}{2}$ b. Metzen, oder Viertel	—	1	8,5298
$\frac{1}{4}$ b. — , od. 1 Halbvier.	—	—	9,2649
$\frac{1}{8}$ b. — , oder Maßl. .	—	—	4,6324
$\frac{1}{16}$ b. — , od. 1 Halbmaßl	—	—	2,3162
$\frac{1}{32}$ b. — , od. 1 Dreyßig.	—	—	1,1581
1 b. Sechsmetzenm. Schäff.	2	2	2,3576
1 w. Kornmalt.=8 Kornmetz.	1	7	3,3237
1 w. Hab. malt=12 Hab. metz.	4	0	1,4880

Es gleichen sich also 10 b. Schäffel sehr nahe mit $12\frac{4}{5}$ Kornmalter, oder 100 Schäffel mit 128 Kornmalter in Würzb. ab; aber 10 w. Habermalter machen sehr nahe 18 bai. Schäffel oder 100 w. Habermalter = $180\frac{1}{2}$ b. Schäffel.

Flüssigkeitsmaße.	Französische Benennungen.	
a. b.	Decalitre velte	Litre pinte
1 b. Maßkan. à 43 Dez. kubikz.	—	1,069
1 w. Aichmaß	—	1,1708
1 b. Eimer zu 64 Maßkan.	6	8,418
1 w. — — — Maß .	7	4,93409

Es verhält sich also der Würzb. Eimer zum baier. = 7493409 : 6841800, oder 684180 Würzb. Eim. = 749341 er . Eimer, oder 1 Würzb. Eimer = 1,0952 baier. Eim.

Baier.) Würz.) Gewicht	a. systemat.) b populäre) französische Benennung.					
a. b.	Myriagr. —	Kilog Livre	Hecto once	Decag gros	Gram denier	Decig grain
1 b. ℔ zu 32 Loth	—	—	5	6	0	0,00
1 w. ℔ Kramgew	—	—	4	7	7	2,59
1 w. ℔ Frohngw.	—	—	5	1	0	1,02
1 b. Znt. zu 100 ℔	5	6	0	0	0	0,00
1 w. Zt. Schw. gw	5	1	0	1	0	2,17

Es gleicht sich also 1 b. Zentner mit 1 w. Zent. 10 ℔ Schwer- oder Nürnb. Handelsgewicht, oder genauer, 1000 b. Pfde. gleichen sich mit 1098 ℔ des letzteren Gewichtes ab.

Es ergiebt sich übrigens aus meiner Darstellung der Würzb. Maße und Gewichte, daß in dieser Hinsicht noch so manches zu wünschen sey. Besonders unterschreibe ich das, was Hr. Prof. Heinrich in seiner lehrreichen Schrift: Bestimmung der Maße und Gewichte des Fürstenthums Regensburg (das. 1808) §. 130. sagt:

„In jeder Haupt- oder Regierungsstadt sollen die Normen für Maß und Gewicht in duplo vorhanden seyn; die einen gehören zur Prüfung und Abgleichung der bürgerlichen Maße und Gewichte; die anderen hingegen sollen gleich einem Heiligthum unter öffentlichem Siegel und Verwahr liegen. Jene werden sich durch öftern Gebrauch abnützen, werden kleine Aenderungen leiden, können sogar theilweis verloren gehen. Da aber die zweyte Abtheilung stets unter der strengsten Aufsicht steht, mithin unversehrt bleibt, so ist für die Erhaltung des gesammten Maß- und Gewichtssystems gesorgt, weil in jedem sich erhebenden Zweifel der freye Rekurs zu den Originalien offen steht."

4.

Maße und Gewichte im Königreiche Würtemberg,

durch die Verordnung vom 10. Okt. 1806 vorgeschrieben.

		Ihr Werth			
		in neuen metrisch. Maß.	in alten paris. Maßen		
a. Längenmaße.	Fuß.	Meter.	Fuß.	Zoll.	Lin.
1 Ruthe . .	10.	2,8649	8	9	10
1 Elle . . .	2,144.	0,614235	1	10	8
1 Fuß = 127 p. L.	1.	0,28649	0	10	7
1 Zoll . .	0,1.	0,028649	0	1	0,7
b. Flächenmaße.	Quadr.ruth.	Are.	Quadratfuße		
1 Morgen .	384.	31,51744	29868,5		
1 Quadratr. .	1.	0,0820767	77,7826		
c. Holzmaß.	Kubikfuß.	Stere.	Kubikfuße		
1 Holzkl. = 6 6. 4 =	144	3,386	98,7836		
d. Getreidmaße.	Kubikzolle.	Litre.	Kubikzolle		
1 Scheff. = 8 Sim	7537,0368	177,2273	8934,454		
1 Simri = 1 —	942,1296	22,1534	1116,807		
1 Vierl. = $\frac{1}{4}$ —	235,5324	5,53835	279,2017		
1 Ecklein = $\frac{1}{32}$	29,4415	0,69229	34,9002		
1 Viertel. = $\frac{1}{128}$	7,3604	0,17307	8,7250		
e. Flüssigkeitsmaß.					
1 F. = 6 E = 75 Kubf	75000.	1763,5639	88905,7		
1 E = 160 M = 12 $\frac{1}{2}$ K	12500.	293,9273	14817,6		
1 Imi = 10 Maß	781 $\frac{1}{4}$.	18,37046	926,101		
1 Maß . . .	78 $\frac{1}{8}$.	1,837046	92,6101		
1 Schop. = $\frac{1}{4}$ Maß	19 $\frac{17}{32}$.	0,459261	23,1525		
f. Gewichte.	Pfund.	Kilogram.	Pfund		
1 Zentner . .	104.	48,87202	99,83947		
1 Pfund . . .	1.	0,4699233	0,959995		

Zu bemerken ist noch hiebey 1), daß das Klafter Holz nach der Höhe noch in Viertel, Achtel und Ecklein od. Sechzehntel eingetheilt wird; 2) daß 167 Maße 1 Eimer Trübaich (= 160 Maß Trübaich) machen; 3) daß 160 Maß Hellaich 176 Maße Schenkaich sind, so, daß also 1 Maß Schenkaich = 71,02 Würtemb. Kubikz. = 1,67004 Liter, = 84,1908 par. Kubikzolle ist; 4) daß das würtemb. Pfund dem Gewichte von $\frac{1}{30}$ Kubikf. Wassers bey + 13°,1 der reaum. Thermometerskale gleich gefunden wurde.

Wenn wir nun einige Vergleichungen zwischen den Würzb. und Würtemb. Maßen anstellen: so finden wir 1), daß 1 würtemb. Holzklafter sehr nahe = $1\frac{3}{5}$ würzb. Klafter sey, das letztere zu 75 Nürnb. Schuhe, und diesen Schuh zu 134,654 par. Lin. angenommen; oder es machen 10 Würt. Klafter etwas über 16 würzb. Kl. — 2) 1 würtemb. Morgen ist etwas über $1\frac{2}{5}$ würzb. Waldmorgen, und beynahe $1\frac{3}{5}$ würzb. Feldmorgen. — 3) 1 würtemb. Fuder macht sehr nahe 1 würzb. Fuder und $11\frac{1}{2}$ Eimer; der würtemb. Eimer macht 3 würzb. Eimer und 59 Maße; die würtemb. Maß macht $1\frac{1}{2}$ würzb. Maß und fast $\frac{3}{10}$ Viermäßchen. — 4) Das würtemb. Malter stimmt beynahe ganz mit unserem Kornmalter überein, so, daß jenes blos beynahe 6 unserer 16theil. Mäßchen mehr hält, als das würzb. Malter.

Allein 10 baier. Schäffel machen etwas über $12\frac{1}{2}$ würt. Schäffel; hingegen gleichen sich 10 würtemb. Eim. mit fast 43 baier. Eimer ab, und 1 baier. Tagewerk ist = $1\frac{2}{21}$ würtemb. Morgen, oder beynahe 1 M. 31 Quadratruthen.

5.

Einiges über die türkischen Maße und Gewichte.

Vielleicht ist das, was ich hier über diesen ziemlich unbekannten Gegenstand aus den Commentarien des arabischen Schriftstellers „Selàhò ddin Mohammed Alsépha-hi“ über das Gedicht „Lamiato' lAjam“, so kurz, als möglich, anführe, nicht uninteressant.

Das größte Constantinopolitanische Getreid- und Mehlmaß ist der Kil oder Kilos (im franz. Kilot. Vega schreibt Kisloz, und giebt dieses zu 1787 par. Kubikz. an). Als Getreidmaß hat er 20, als Reißmaß 10 Okka; die Okka hat 400 Dirhem oder Drachmen, das Dirhem 4 Dank (Saamenkörner einer Pflanze). Eine halbe Drachme heißt (verdeutscht) Dattelkorn wegen der Aehnlichkeit seiner Schwere mit jenem Gewichte. $\frac{1}{2}$ Dank heiß Kirat (Bockshörnleinskern), deren 8 also = 1 Drachme. $\frac{1}{2}$ Charnuba oder Bockshörnleinskern heißt Tassudsch, deren also 16 auf 1 Drachme gehen (jedes von der Größe des Saamenkornes einer Pflanze, welche jenen Namen führt).

Die Hälfte eines solchen Kornes ist dann eigentlich ein Gran, deren 32 auf 1 Drachme gerechnet werden. Ein solches Gran ist gerade die Größe des Saamens des Mastixbaumes, von dem jedes Korn 2 Waitzenkörnern gleich gilt, deren sohin 64 eine Drachme machen. Da nun 1 Waitzenkorn = 2 Reißkörnern, so hält die Drachme 128 Reißkörner, oder ist dem Gewichte von 256 Senfkörnern gleich, indem 1 Reißkorn = 2 Senfkörnern.

Ursprünglich wurde die Drachme zu 8 Dank, dann zu 6, dann zu 4 gerechnet. Gegenwärtig ist das Gewicht von 6 Dank oder $1\frac{1}{2}$ Drachme unter dem besondern Namen Miskal (Methkal) bekannt. Nach der alten Berechnung (die Drachme = 8 Dank = 16 Karaten) hatte das Miskal 24 Karate, welche Berechnung die Juweliere beybehalten haben.

Nach der vom Chalifen Omar festgesetzten Bestimmung machen 10 Silber-Dirhem, oder die kleinste Gattung von Silbermünzen, 7 Miskal aus, deren jeder = 100 Waitzenkörnern gesetzt wird. (1 Miskal hat also nach dieser Berechnung etwas mehr als $1\frac{1}{2}$ Drachme = 96 Waitzenkörner). Es sind also 7 Miskal = 10 Dirhem (als Silbermünze) = 700 Waitzenkörnern. Da nun 10 Dirhem oder Drachmen, als Gewicht, nur = 640 Waitzenkörner: so erklärt sich hieraus der Unterschied zwischen Dirhem, als Münze, und

der Drachme als Gewicht. Die Ursache, warum Omar 10 Dirhem auf 7 Miskale festsetzte, lag in der Verschiedenheit der persischen und griechischen Silbermünzen, unter welchen die schwersten 1 Miskal, also 10 Dirhem 10 Miskale wogen. Allein von den mittleren Münzen wogen 10 nur 6 Miskale, und von den leichtesten wogen 10 nur 5 Miskale. Nun geht aus den Dritteln der 3 Zahlen 10,6,5, nämlich $3\frac{1}{3}$, 2, $1\frac{2}{3}$ durch Addition die Zahl 7 hervor: diese setzte demnach Omar als Grundlage des gesetzmäßigen Münzfußes fest. Harun Raschid, sein Nachfolger, beobachtete dieselbe Grundlage bey Ausprägung der Silbermünzen.

Vega giebt die Okka à 400 Drachmen zu 26396 holl. Aß. an; die Drachme wäre also = 65,99 dieser Aßen. In den meisten arabischen Ländern wird die Okka nur zu 12 Drachmen gerechnet.

Aehnliche Verschiedenheit findet auch rücksichtlich anderer Maße und Gewichte statt. Das Rotl (Rottel) z. B. von Bagdad wiegt 130; von Mekka 150, von Medina 180, von Cairo 144, von Damaskus 600, von Antiochia 800 Drachmen das anatolische Rotl, gewöhnlich Batman genannt, wiegt 6 constantinopol. Okka.

Eben so wiegt das Mann gewöhnlich 260, aber zu Mekka 240, zu Damaskus 720, zu Haleb 600 und zu Jerusalem 1000 Drachmen. Auch das Mudd wiegt insgemein 260 Dr., in Irak aber nur 173 Dr. Der alte Zentner wiegt 12000 Dr., der Constantinopol. 44 Okka.

Eben so ist der Erdeb (eine Gattung ägyptischen Getreidmaßes, 9 Constantinopol. Kilos haltend,) sowohl für verschiedene trockene Waaren, als an verschiedenen Orten verschieden; z. B. zu Rosette hat der Erdeb Getreid 180, der Erdeb Reiß 150, zu Damiate 225 Okka, so daß 10 Erdeb von Damiate gewöhnlich 7 Erdeb von Rosette gleich gerechnet werden.

Für flüssige Dinge ist der Alm zu Constantinopel = 264 altfranz. Kubikzoll (nach Vega). Bey den sogenannten

zählenden Dingen bezeichnet der Ausdruck Mazze 50 Stücke.

Hr Prof. Magold giebt die türk. Rechnungsmünzen so an:

Piastor = 40 Paras = 100 gute Asper = 120 Kurantasper — 185/3 holl. Aßen = 54 Kreutzer 3 Pf. 1 Hell. Ferner 1 Beutel (Keser) = 500 Piaster; 1 Beutel Gold (Kitze) = 30000 Piaster. Hiernach war die Hinterlassenschaft des Paßmannoglu zu schätzen, welche am rohen Silber 14000 Okta (1 Ok. = 2½ ℔) und an Gelde 800000 Beutel betrug.

6.

Sonst gewöhnliches Längen- Flächen- und Körpermaß.

a. Längenmaß.

Das Längenmaß hat zur Einheit den Fuß, oder die Elle, oder die Meile.

α) Der Fuß als Einheit des Längenmaßes betrachtet.

Gewöhnlich ist die Rheinländische Ruthe und der 12te Theil derselben, der Rheinländische Fuß, im bürgerlichen Leben als Grundmaß angenommen, so daß also 1° (1 Ruthe) = 12′ (12 Fuß); 1′ = 12″ (12 Zolle), 1″ = 12‴ (12 Linien oder 1te Skrupel) 1‴ = 12⁗ (12 2te Skr.) hält; dieß nach der Duodezimaleintheilung, welche noch bey Handwerkern — Zimmerleuten, Maurern . . . sehr üblich ist. Der Feldmesser hingegen legt zwar auch größtentheils dieselbe Ruthe zum Grunde, theilt aber nach der Dezimaleintheilung der leichtern Rechnung wegen die Ruthe in 10′, 1′ in 10″ u. s. w. Da aber der gelehrte Mathematiker mit dem Feldmesser zwar eine, doch noch etwas verschiedene Art von Dezimalmaß hat: so tritt hier, um sich einander zu verständigen, und um gehörig reduziren zu können, eine doppelte Rücksicht ein: 1) auf Feldmesser und Werkleute, 2) auf mathematische und handwerksmäßige Berechnung und Ausmessung von Flächen.

I. Es sollen m', m'' u. s. w. 1 Feldmesserfuß, Zoll u. s. w w', w'' u. s. w. Fuße, Zolle u. s. w. nach dem Werkmaß bedeuten: es sind demnach dem Gesagten gemäß

$10m' = 12w' = 1$ rheinl. Ruthe
$100m'' = 144w'' = 1$ rh. R.
$1000m''' = 1728w''' = 1$ rh. R.
daher $m' = 1{,}2\,w'$; $w' = 0{,}833m'$
$m'' = 1{,}44\,w''$; $w'' = 0{,}6944\,m''$
$m''' = 1{,}728\,w'''$; $w''' = 0{,}5787\,m'''$

II. Der gelehrte Mathematiker nimmt dagegen, wie der Professionist, den Rheinländischen Fuß als Einheit an. Beym ersten soll nun n'', n''', n'''': bey den letzten w'', w''', w'''' Zolle, Linien, Skrupel bedeuten: es ist also

$10n'' = 12w'' = 1$ Fuß
$100n''' = 144w''' = 1$ F.
$1000n'''' = 1728w'''' = 1$ F.
daher $n'' = 1{,}2w''$; $w'' = 0{,}833.\,n''$
$n''' = 1{,}44\,w'''$; $w''' = 0{,}6944.\,n'''$
$n'''' = 1{,}728\,w''''$; $w'''' = 0{,}5787.\,n''''$

Reduktion des Längenmaßes nach der Duodezimaleintheilung auf das andere nach der Dezimaleintheilung, und umgekehrt.

Will der Feldmesser z. B. 8° 7' 4'' Duodezimalmaß auf sein Dezimalmaß bringen: so bleiben 1) die Ruthen; aber 2) $7'\,4'' = 84'' + 4'' = 88\,w''$, und nach I. $= 88 \cdot 0{,}6944m'' = 61{,}11072\,m''$ oder nach Weglassung der kleinern Theile 072 hat man $61{,}11\,m'' = 6'\,1''\,1'''$ Dezimalmaß (§. 186. Anmerk.).

Umgekehrt: man soll 16° 5' 6'' 7''' Dezimalmaß im Duodezimalmaße ausdrücken. Es bleiben wieder die Ruthen; und $5'\,6''\,7''' = 567\,m''' = 567 \cdot 1{,}728w''' = 979{,}776w'''$ $= 980w'''$ (nach Wegl. der Dezimaltheile). $\frac{980}{12} = 81''$ $8''' = 6'\,9''\,8'''$ Duodezimalmaß.

Auf eben die Art verfährt man, wenn man die in II. mit n bezeichneten Maße in die mit w bezeichneten verwandeln will, und umgekehrt.

Anmerkung. Für diejenigen, welche mit den Logarithmen bekannt sind, bemerken wir noch, daß man sich letzterer hier mit Vortheile bedienen könne, indem man, statt multipliziren zu müssen, nur die Logarithmen der Faktoren addiren darf. Die hier beständigen Logarithmen sind folgende:

Logar. von	1,2	= 0,0791812
— —	1,44	= 0,1583625
— —	1,728	= 0,2375437
— —	0,833	= 3,9206450 — 4
— —	0,6944	= 3,8416097 — 4
— —	0,5787	= 3,7624535 — 4

Im vorigen ersten Beyspiele setzt man daher, statt 88. 0,6944, die Logar.

$$\begin{array}{r} 1,9444827 \\ 3,8416097 - 4 \\ \hline 1,7860924 \end{array}$$

Diesem Log. entspricht die Zahl 61, 11, wie oben.

Bemerkenswerth sind noch folgende Rutheneintheilungen, wo die Fuße die landesüblichen bedeuten.

	Fuß		Fuß
Anspacher	12	Hallische alte	15
Bamberg. Feldr.	20	Hamburger	16
— Wiesenr.	19	Leipziger	$15\frac{1}{6}$
— Holzr.	$21\frac{1}{2}$	Magdeburger	12
Basler	16	Nürnberger	16
Berner	10	Olezkosche	15
Brandenburger	15	Pommerische alte	16
Calenbergische	16	— Faden	7
Colmarische	15	Rheinländische	12
Culmische alte	15	Schlesische	15
— neue	15	Schwedische	16
Danziger	15	Würtembergische	16
Dänische	10	Würzburg. Feldr.	12
Englische	$16\frac{1}{2}$	— Waldr.	14
Erfurtische	14	(ehemals).	
Frankfurter	$12\frac{1}{2}$		

Auf alten Charten kommen noch vor: die soldinsche Ruthe = 14′ 1″ rh. Fuß, die Küstr. Kammerruthe = 15′ 3″ rh. F.; die große Neumärksche = 16′ rh. F.

Reduktion des in verschiedenen Ländern gebräuchlichen Fußmaßes.

Dieser Reduktion hat man, selbst noch bey dem neuen franz. Maße, den Pariser Fuß zum Grunde gelegt. Er besteht aus 144 Linien Duod. Maß. Theilt man jede Linie wieder in 10 gleiche Theile: so hält jener Fuß 1440 dieser Theile. Diesen $\frac{1}{144}$ oder $\frac{1}{1440}$ Theil des Par. F. hat man als Einheit angenommen, und bestimmte für andere Fußmaße, wieviel solcher kleinen Theile sie enthalten. Will man das neue franz. Maß zum Grunde legen: so hat man folgende Vergleichungszahlen zu bemerken:

1 Par. Toise	= 1,949037	Mèt.	= 1499,037	Millimèt.
1 . . . Fuß	= 0,3248394	. .	= 324,8394	. . .
1 . . . Zoll	= 0,02706995	. .	= 27,06995	. . .
1 . . . Linie	= 0,00225583	. .	= 2,25583	. . .

Da wir die Elle zugleich mit in die Reduktionstabelle bringen wollen; so folgt diese erst weiter unten.

Bey der Reduktion einer gewissen Anzahl von Fußen z. B. Wienermaßes auf ein anderes z. B. Brandenburger Maß verfährt man überall auf gleiche Weise z. B. nach der Kettenregel (§. 170), indem man nur die Verhältnißzahlen jedem Namen beyschreibt. Z. B. wieviel Brandenburg. Fuße machen 456 Wiener? Da die Verhältnißzahlen hier 1391,3 und 1401,3 sind, indem der Brandenburger Fuß 1391,3 jener Theilchen, deren einer = $\frac{1}{1440}$ des Par. F. ist, und der Wiener F. 1401,3 dieser Theilchen enthält: so setze man:

x Brandenb.	456 Wiener
1391,3 Wien.	1401,3 Brandenb.

$$x = \frac{456 \cdot 1401{,}3}{1391{,}3} = 459{,}3 \text{ Brandenburg.}$$

(vergl. §. 158. Anm. 2.).

Die generelle Regel ist hier: man multiplizire die gegebene Anzahl Fuße mit der Verhältnißzahl des Fußes von demselben Namen, und dividire dieses Produkt durch die Verhältnißzahl des Fußmaßes, worein man jene Anzahl verwandeln soll.

Mit größerer Leichtigkeit wendet man auch hier wieder die Logarithmen an, indem man durch diese statt der Multiplikation eine bloße Addition, und statt der hier nöthigen Division eine bloße Subtraktion anstellen muß; woraus man denn den Logar. der gesuchten Zahl erhält. So wäre nach dem vorig. Beysp.: Log x = log. 456 + log. 1401,3 - log. 1391,3. Nun ist log. 456 = 2,6589648

log. 1401,3 = 3,1465311

5,8054959

log 1391,3 3,1434208

log. x = 2,6620751. Diesem Log. entspricht die Zahl 459,27, wie oben, indem ich dort, wegen Weglassung des 7, die Ziffer 2 um 1 erhöhte.

Wenn ein Verhältniß zwischen 2 Fußmaßen gegeben ist, wovon nur das eine in der Vergleichstabelle, die wir unten liefern, zu finden ist: so kann man mittels der zusammengesetzten Regel Detri, oder durch die Kettenregel, das noch nicht aufgeführte Fußmaß, nach der in der Tabelle zum Grunde gelegten Einheit, ausdrücken, und auch sogleich eine Anzahl Fuße des noch nicht verglichenen Maßes mit jedem in der Tabelle verzeichneten vergleichen.

Z. B. man wüßte, daß sich der Bamberger Feldfuß zum Nürnberger Stadtfuß verhält wie 12 : 13, oder daß 13 Bamb. Fuß = 12 Nürnb. F. Wüßte man ferner aus der Vergleichungstabelle, daß der Nürnb. F. = 1346,54 Par. Skrupel, oder 134,654 Par. Linien = 303,7564 neu franz. Millimètr. sey: so könnte man nun durch folgende Rechnung die Frage beantworten: wieviel Wiener F. sind 150 Bamb. F.? 2) Den Par. Fuß zu 144 Linien = 324,8394 Millimètr. als Einheit angenommen, wieviel dieser Theile gehen auf einen Bamb. Fuß?

I.

x Wien. F.	150 Bamb. F.
13 Bamb. F.	12 Nürnb. F.
1346,54 Nürnb.	1401,3 Wien.

Woraus x = 144,092 Wien. F. gefunden wird.

II.

x Millim.	1 Bamb. F.
13 B. F.	12 Nürnb. F.
1 Nürnb. F.	303,7564 Millim.

also 1 Bamb. F. $= \frac{303,7564 . 12}{13} =$ 280,3905 Millimètr. = 124,296 Par. Linien, welche Zahlen man neben Bamb. in der Tabelle setzte.

Zusatz. Das in Bergwerken übliche Längenmaß ist das Lachtermaß. Die Lachter wird in Achtel, das Achtel in 10 Zoll, der Zoll in 10 Primen, und die Prim. in 10 Sekunden getheilt.

Das Lachter ist in (alt) Pariser Fußen

Claustbaler 5,9222	Joachimsthal 6,0201
Dänisches 6,1923	Pfälzer 6,5460
Eislebensches 6,1910	Preußisches 6,2580
Freyberger 6,1055	Schweitzer 6,2322
Idria 6,0260	Schwedisches 5,4830.

β. Die Elle als Einheit des Längenmaßes betrachtet.

Die Elle wird in halbe, Viertel, Achtel u. s. w. eingetheilt. Zur Vergleichung aber der in verschiedenen Ländern üblichen Ellen bedient man sich, wie beym Fuße, des Par. königl. Fußes, indem man auch hier 144 Linien oder 1440 Skrupeln dieses Fußes als Einheit zum Grunde legt.

Vergleichungstabelle einiger Fußmaße und Ellen mit dem ehemaligen Pariser Fuß und neu franz. Mètre.

Namen der Oerter	Par. Lin.	neu franz. Millimètre
Amsterdamer Fuß	125,48	283,0615
— — Elle	305,4	688,9305
Anspacher Stadt-Fuß	132,92	299,8447
— — — Elle	276,78	597,2984
Augsburger Fuß	131,29	296,1678
— — große Elle	268,80	606,3668
— — kleine —	262,60	592,3807
Aschaffenburger Fuß	127,45	287,5 . .
— — Elle	254,67	574,5 . .
Antwerpner Fuß	126,6	285,5880
— — Elle	307,8	694,3445
Bamberger Fuß	124,296	289,3905
— — Elle	299,9	676,5234
Berliner Fuß	139,13	313,8536
— Elle	296,0	667,7256
Böhmen, Prager Fuß	131,4	296,4160
— — Elle	263,3	593,9600
Brabander Elle in Teutschland	306,5	691,4119
Braunschweiger Fuß	126,5	285,3625
— — Elle	253,0	570,7249
Breslauer Fuß	127,65	287,9567
— Elle	255,3	575,9133
Brüssel, Fuß	122,2	275,6624
— große Elle	307,8	694,3443
— kleine Elle	303,4	684,4188
Dänemark, Fuß	139,13	313,8536
— Elle	278,26	627,7072
Danziger Fuß	127,15	286,8287
— Elle	254,35	573,7704
Dresden, Fuß	123,3	283,1066
— Elle nach Aster	251,13718	566,5158

Namen der Oerter	Par. L in.	neu franz. Millimètre
Eichstädter Fuß	134,784	304,0498
— Elle	342,6	772,8473
England, Londner Fuß, (nach La Lande)	135,1154	304,7974
— Elle, Yard	405,3	914,2879
— — große Elle	506,9	1143,4802
Frankfurter Fuß	126,162	284,6
— Elle	242,61	547,3
Fuldaer Fuß	125,4	282,881
— Elle	250,8	565,76
Frankreich, Fuß	144,0	324,8394
— Elle	526,8	1188,3712
— Mètre	443,30	1000
Griechenland, alter Fuß		
nach Auzout	135,80	306,3417
nach Le Roy	136,56	308,0561
mittlerer Fuß	138,6072	310,6473
Hamburger Fuß	127,0	286,4903
— Elle	254,0	572,9808
Karlsruher, oder badisch-unterländischer Feldfuß	123,3360	278,2250
— Werkfuß	129,0528	291,1212
— Elle	242,5248	547,0974
Königsberger Fuß	136,4	307,6952
— Elle	254,8	574,7855
Krakau, Fuß	158,0	356,4211
— große Elle	273,5	616,9695
— kleine Elle	250,6	565,3200
Leipziger Fuß	125,3	282,6555
— Elle	250,6	565,3110
Münchner Fuß	129,38	291,8593
— Elle	411	833,0149
Nürnberg, Fuß	134,654	303,7564
— Artillerie-Fuß	129,83	292,8703
— Elle	291,08	656,6269

Namen der Oerter	Par. Lin.	neu franz. Millimètre
Regensburger Fuß	139,000	313,5603
— Elle	359,083	810,0299
Rheinländischer Fuß *)	139,13	313,8536
Römischer Fuß, alter	130,68	294,7918
— neuer (Palmo)	99,03	223,3948
Rußland, Fuß	238,6	538, 10
— Elle (Arschine)	318,24	717,8953
Salzburger Fuß	131,6	296,8672
— kleine Elle	355,6	800,8196
— Elle für Leinwand	445,8	1005,6450
Schweden, Fuß	131,6	296,8672
— Elle	263,2	593,7344
Spanien, Fuß	125,3	282,6555
— Elle (Vara)	375,9	847,9664
Triest, Elle zu Wollenzeug	300,0	676,7189
— — — Seidenzeug	284,66	642,1445
Tyrol, Fuß	148,11	334,1110
— Elle	356,47	804,1356
Venedig, Fuß	154,0	347,3978
— Elle	282,3	636,8208
Wien, Fuß **)	140,127	316,1023
— Elle	345,40	779,1922
Würtemberger Fuß	127,00	286,4904
— — Elle	272,00	613,5857
Würzburger Fuß ***)	129,3661	291,8279
— Elle	258,7322	583,6558
Zürcher Fuß	133,4	300,928
— Elle	266,79	601,8550

*) Dieser wird auch sonst in dem Verhältnisse 14400 : 13918,8 angegegeben (nach Lulofs, eben so nach La Lande).

**) Alle Angaben über diese sowohl, als die folgenden Wiener Maße und Gewichte sind aus dem Buche „natürliches Mass- Gewichts- und Münzsystem von G. Freyherrn Vega. Nach dessen Tode herausgegeben von Kreil. Wien 1803." -- als die zuverläßigsten genommen.

***) Nimmt man Huberti's Angaben, daß 1835 gemeine Werkschuh 278 Toisen ausmachen, als genau an: so hat 1 würzb. Werkschuh 130,89 par. Lin.

Anmerkung. Diese Tabelle in Verbindung mit der obigen, welche die Verschiedenheit der Ruthen angiebt, dient, das absolute Verhältniß der Ruthen gegeneinander zu finden. So verhält sich z. B. die Nürnberger Ruthe zur Rheinländischen wie 16 . 134654 : 12 . 139130, d. i. wie 2154464 : 1669560 oder 1669560 Nürnb. Ruth. machen 2154464 Rhein. R.

7. Die Meile als Einheit des Längenmaßes betrachtet.

Die sogenannte Meile ist römischen Ursprunges, was schon die Benennung Milliarium andeutet. Es begreift dieses Längenmaß 1000 Schritte, jeden zu 5 altrömischen Schuhen, oder auch 8 Stadien, jede zu 125 Schritten, in sich. Dieß giebt nach dem Verhältniß des altrömischen Schuhes zum Pariser (nämlich 133,928 : 144,0) für diese Meile 4650,3 Par. Fuß, oder 775,05 Toisen, wie oben schon bemerkt wurde.

Die neuern Europäer haben ihre Meilen viel größer angesetzt, und bald diesen, bald jenen aliquoten Theil des mittleren Meridiangrades auf der Erde dafür angenommen. Die vermuthlich nach den niederteutschen Schiffern oder Geographen sogenannte teutsche, oder auch geographische Meile macht den 15ten Theil eines mittleren Erdmeridiangrades, oder 3811,6 Toisen. In eben diesen Meilen wird auch der Erdhalbmesser zu $859\frac{1}{2}$, und der Erdumfang zu 5400 Meilen gerechnet. Indessen ist diese Meile fast nirgends im teutschen Reiche gebräuchlich; sondern fast jede Provinz hat, zur großen Unbequemlichkeit für Reisende und Geographen, eine andere Meile. Eine Reduktion dieser verschiedenen gebrauchten Meilen ist daher vom großen Nutzen. Folgende Tabelle enthält hievon das Merkwürdigste: die erste Columne enthält die Namen der Meilen, die zweyte zeigt, wieviel in geographischen Meilen allzeit 100 jener Meilen betragen, die dritte, wieviel rheinländische Fuße auf eine der in der ersten Columne genannten Meilen gehen; die vierte

Columne endlich giebt an, wieviel von den in der ersten Columne genannten Meilen auf einen mittleren Meridiangrad gehen. Hiebey ist die mittlere Meridianmeile zu 3811,6 Par. Toisen, oder 22869,5 Par. Schuhen, oder 23661 rheinl. Schuhen, (indem man das Verhältniß des Par. Fußes zum Rheinländischen setzt 14400 : 13918,3) oder 1000 geometr. Schritten angenommen. Mit Hilfe dieser Zahlen und vermöge der Kettenregel berechnet man auf eine leichte Weise die für irgend eine Meile in der Tabelle angegebenen Zahlen, sobald man weiß, oder durch Rechnung gefunden hat, wieviel altpar. Fuße oder Toisen die fragliche Meile habe. Z. B. man will berechnen, 1) wieviel geogr. Meilen 100 römische M. betragen; 2) wieviel rheinl. Fuße 1 römische Meile mache; 3) wieviele röm. M. auf 1 Erdmeridiangrad gehen?

Da nun 1 röm. M. = 4650,3 par. Fuß = 775,05 Toisen ist: so stehen die 3 Rechnungen so:

1

x geogr. M.	100 röm. M.
1 röm. M.	775,05 Tois.
3811,6 T.	1 geogr. M.

x = 20,334

2

x rh. F.	1 röm. M.
1 röm. M.	4650,3 par. F.
1 par. F.	14400 par. Lin.
13918,3'''	1 rh. F.

x = 4811,2.

3

x röm. M.	1 Meridiangr.
$1\frac{1}{15}$ Grad	3811,6 par. Tois.
775,05 T.	1 röm. M.

woraus x = 73,76 M. gefunden wird.

Meilen, deren Benennung und Grundmaße	100 derselben betragen in geograph. Meilen	enthalten rh. Fuße	gehen auf einen Gr. des Erdmeridian.
Arabische Meile .	26,470	6263	56,67
Baierische, kleine Meile	105,660	25000	14,15
— große —	172,440	40800	8,69
Böhmische zu 3545 Tois.	93,052	22017	16,12

Meilen, deren Benennung und Grundmaße	100 derselben betragen in geograph. Meilen	enthalten rh. Fuße	gehen auf einen Gr. des Erd-meridian.
Chinesische neue Li	7,755	1835	193,40
Dänische zu 12000 dänischen Ellen, à 2 rh. Schuhen	101,430	24000	14,79
Französische alte Leuka od. Lewa = 1,5 röm. M.	29,762	7042	50,50
vormal. Lieue	59,864	14197	25,00
jetzige Lieue à 10000 Métr.	134,609	31850	10,00 *)
neue Seemeile zu $\frac{1}{20}$ Grad	74,783	17694	20,05
Grosbrittanische, alte = 12 Quarantena	31,512	7456	47,60
neue zu 1760 Yard	21,702	5135	69,12
Seemeile	24,999	5915	60,00
Leagues	73,729	17445	20,00
Holländische	78,948	18680	19,00
Italiänische = 1000 geogr. Schritten	24,992	5915	60,00
Nürnbergische	114,1[illegible]0	27000	13,10
Oesterreichische	200,760	47500	7,48
Preussische zu 1800 Danz. Ruthen	104,390	24700	14,37
Römische 1 zu 8 olympischen Stadien	20,334	4811	73,77
Russische Werste = 1500 Archin.	14,378	3402	104,30
Schwedische zu 18000 Ellen	144,090	34094	10,41
Spanische zu 5000 Varas = 2147 T.	56,329	13328	26,63
Stadien oder Feldwege 1) griechische, olympische = 100 Orgy.	2,498	591	600,0
2) Seemeilen	1,999	473	750,0
3) ägyptische	1,331	315	11,25
Teutsche, alte Rasta = 3 röm. Meilen	59,860	14179	25,00
neue kleine	84,527	20000	17,74
geographische	100,000	23661	15,00
Türkische Berri	22,497	5323	66,67
Seemeile	17,652	4179	86,40
Ungarische	112,530	24625	13,30

*) Den Quadranten zu 100 Graden angenommen. 20 Myriameter machen 27 gemeine teutsche Meilen.

b. Flächenmaß.

Das Maß für die Flächen, welche zwey Dimensionen, nach der Breite und Länge haben, ist das Quadratmaß. Die Fläche irgend eines Quadrats wird nämlich als Einheit angenommen, und man sagt, man habe eine in der Natur gegebene Fläche, eine Wiese, ein Stück Feld, ausgemessen, sobald man bestimmt, wieviel von jenen Einheiten die gegebene Fläche enthält.

Das Flächenmaß bekömmt seinen Namen von der Seite dieses Quadrats. So heißt ein Quadrat, dessen Seitenlinie soviel Fuß hält, als gewöhnlich auf eine Ruthe an einem gewissen Orte gerechnet werden, eine Quadratruthe. Hat z. B. die Seite 12 Würzburger Fuße: so heißt jenes Quadrat eine Würzb. Quadratruthe; hält sie 6 Par. Fuße: so heißt es eine Quadrattoise; ist die Seitenlinie so viel Fuß lang, als eine Meile hat: so heißt das Quadrat eine Quadratmeile.

Sehr oft dient die Quadratruthe als Fundament anderer Flächenmaße. Kleinere Theile von ihr sind der Quadratschuh, der Quadratzoll u. s. w. Verlangt man zu wissen, wiviel Quadratschuhe eine gewisse Quadratruthe hält: so darf man nur aus der obigen Tabelle für die Ruthen die Zahl suchen, welche jener Ruthe beygeschrieben ist, und sie mit sich selbst multipliziren. So hat die Würzburger Quadrat-Feldruthe 12 . 12 = 144, die Waldruthe aber ehemals 196 Quadratschuhe.

Für den Feldmesser, welcher nach der Dezimaleintheilung verfährt, hat 1 Quadratruthe 100 Quadratfuß, 1 Quadratfuß 100 Quadratzolle u. s. w. Daher 1 Quadratruthe = 10000 Quadratzoll, = 1000000 Quadratlinien. Nach dieser Eintheilung kann man jede gegebene Zahl von einer niedrigen Art auf gleiche Zahlen höherer Art zurückführen, wenn man die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen eintheilt, zu jeder Klasse 2 Ziffern rechnet, und die stufenweise Steigerung der Klassen durch die Zeichen für die

stufenweise — höhere Arten andeutet: So ist die Zahl 37640328 Quadratlinien = 37° 64' 03'' 28''' Quadratmaß. Woraus zugleich erhellt, wie man eine Zahl, welche mehrere Zahlen von verschiedenem Quadratmaße enthält, auf eine gleiche von dem niedrigsten Quadratmaße bringen könne. (Man vergl. hier §. 186. Anm.). Eine Dezimalzahl im Quadratmaße drückt man auf ähnliche Art aus; so ist 23,242 Quadr. Fuß = 23' 24'' 20'''.

Nach der Duodezimaleintheilung ist die Quadratruthe = 144 Qu. Fuß; 1 Qu. Fuß = 144 Qu. Zoll u. s. w.; folglich 1 Quadratr. = 20736 Qu. Zoll = 2985984 Qu. Linien.

Zur Reduktion nun des einen Maßes auf das andere bedient man sich folgender Formeln, wo m wieder das Dezimal und w das Duodezimalmaß bedeutet; wenn nämlich einerley Ruthe statt findet: so ist

$$100\,m' = 144\,w' = 1 \text{ Quadratruthe}$$
$$10000\,m'' = 20736\,w''; = 1 \text{ Quadratr.}; \text{ u. s. w.}$$

Daher ist $m' = 1{,}44\,w'$, und $w' = 0{,}6944\,m'$
und $m'' = 2{,}0736\,w''$, und $w'' = 0{,}4822''$.

Ist aber das Fußmaß einerley: so hat man, auf ähnliche Art, wie oben bey dem Längenmaße:

$$100\,n'' = 144\,w'' = 1 \text{ Quadratfuß}$$
$$10000\,n''' = 20736\,w''' = 1 \text{ Quadratfuß.}$$

Daher ist $n'' = 1{,}44\,w''$, und $w'' = 0{,}6944\,n''$;
und $n''' = 2{,}0736\,w'''$, und $w''' = 0{,}4822\,n'''$,
u. s. w.

Man soll z. B. 2,3748 Dez. Qu. ruthen reduziren auf das Duodezimalmaß. Die Ruthen bleiben, es müssen also noch 37' 48'' oder 3748'' auf das letztere Maß reduzirt werden. Nach Obigem hat man 3748. 2,0746 w'' = 7771,8528 Duod. Qu. zoll. Es ist ferner $\frac{7771}{144}$ = 53 Qu. fuß und 139 Qu. zoll. Also ist 2,3748 Dez. Qu. ruthen = 2° 53' 139,8 . . '' im Duod. maße. Sollte man umgekehrt eine gegebene Zahl im Duod. maß auf Dez. maß reduziren: so verwandelt man vorerst die gegebene Zahl, wenn sie Zahlen von verschiede

ner Art enthält, in eine gleiche der niedrigsten Art (die Ruthen bleiben). Enthielte diese, wie vorhin, Zolle: so wird ihr Faktor 0,4822 m'. Eben so ist 1 Würzb. Qu. zoll im Duod. maß = 0,4822 Dez. Qu. zoll u. s. w.

Um die Anzahl von Quadratfußen an einem Orte auf die an einem andern zu reduziren, ist vorerst zu merken, daß sich die Quadratfuße zweyer verschiednen Orte zueinander verhalten, wie die Quadrate jener Zahlen pariser Linien, welche den Fußen in der Tabelle beygeschrieben sind. Es verhält sich z. B. der Brüßler Quadratfuß zum Pariser, wie $129^2 : 144^2$, d. i. 144^2 Brüßler Qu. fuße machen 129^2 Pariser. Wollte man nun finden, wieviel z. B. par. Qu. fuße 2804 Brüßler Q. fuße machen: so setzte man:

x Par. Qu. fuße	2804 Brüßl. Qu. fuße
144^2 Brüß. Qu. fuße	129^2 Par. Qu. fuße
also x =	$\frac{129^2 . 2804}{174^2}$

Auf dieselbe Art verfährt man in allen übrigen Fällen. Wollte man das Verhältniß der Quadratruthen an verschiedenen Orten wissen: so quadrirte man nur die Verhältnißzahlen, welche wir in der oben nach der Tafel der Fuße gesetzten Anmerk. angaben. Z. B. die Nürnb. Qu. ruthe verhält sich zur rheinl. Qu. ruthe, wie $16^2 . 13465^2$ zu $12^2 . 13913^2$; oder die Würzb. zur Nürnb. Qu. R., wie $12^2 . 129366^2 : 16^2 . 134654^2$; d. i. 46417 W. Qu. R. gleichen sich sehr nahe mit 24 99 Nürnb. Qu. R. ab.

Man kömmt etwas schneller zum Ziele, wenn beyde Quadratruthen schon in demselben dritten Quadratmaße berechnet sind. So haben wir z. B. oben berechnet, daß die Würzb. Quadratruthe = 12,2635 centiar., die baierische aber = 8,5182 centiar sey. Demnach verhält sich die würz. □ruthe zur baier. wie 122634 : 85182, der beynahe wie 12 : 8, oder wie 3 : 2, d. i. 2 Würzb. □ruthen machen beynahe 3 baierische. Oder, da $\frac{12,2635}{8,5182} = 1,439 \ldots$ ist: so ist 1 Würzb. □ruthe = 1,439 baier., oder 10 Würzb. □r. sind beynahe = 14 baier. □ruthen.

Zur Vergleichung des verschiedenen alt franz. Feldmaßes mit dem neueingeführten dient folgendes Täfelchen:

Alt-Französische Feldmaße	Decam. carrés oder Quadr. Ruthen	Cantiares oder Mètres carrés
Quadr. Ruthe à 17′ 5″ macht	0,320086	32,0086
— — à 18′ :	0,3418861	34,1886
— — à 18′ 4″ :	0,3546679	35,4668
— — à 22′ :	0,510719	51,0719
— — à 24′ :	0,607797	60,7797

Der Flächeninhalt eines Stück Feldes, Waldes u. d. gl. wird im Würzburgischen durch Morgen oder Acker angegeben; in andern Ländern auch durch Jucharte, Hufen, Tagewerke, auch Mannwerke u. s. f. Die folgende Tabelle giebt sowohl über die Verschiedenheit dieser Namen als der Anzahl der Quadratruthen, die man auf ein bestimmtes Stück Feld an verschiedenen Orten rechnet, Aufschluß.

Ein Anspacher Morgen hält 360 Qu. Ruthen.
Bamberger (ehemals) jeder Morgen hält 150 Qu. R.
— aber ein Tagewerk Wiesen und Weier hält 54150 Quadr. Schuh.
— ein Morgenfeld hält 60000 — —
— ein Acker Holz oder Weinberg hält 66150 — —
Baseler Juchart hält 140 Quadr. Ruth.
Berner Juchart — 238 — —
M. Brandenb. Morg. — 300 — —
— Hufe — 30 Morgen
Baierisches Tagwerk oder Morgen hält 40000 Quadr. Fuß
Calenberger Morgen — 120 Quadr. R.
Colmar. Jeuche — 180 — —
Danziger Morgen — 300 — —
Englische Acre — 160 — —

(von 16½ Sch. die Längenr.)

Englische Fardingdale hält	40 Quadr. Ruth.			
Erfurt	—	—	168 — —	
Frankfurter Feldmorg.	—	160 Qu. Feldruth.		
		= 25000 Qu. Fuß.		
— Waldmorg.	—	160 Qu. Waldruth.		
		= 40215 Qu. Fuß.		
— Hube oder Hufe Landes	= 30 Morgen			

Altfranz. kleiner Arpent hält 100 Quadr. Ruth.
= 35,46679 Ares
(die Längenruthe zu 18′)

Altfranz. großer Arpent hält 100 Quadr. Ruth.
= 51,0719 —
(die Ruthe zu 22′)

Alt-Hallischer Acker hält 300 Quadr. Ruth.
Hamburger Morgen — 600 — —
(die Längenr. daselbst zu 15 Rheinl. Sch.)

Ein Magdeburger Morgen hält 180 Quadr. Ruth.
(die Ruthe zu 12′ Rhein.)

Nürnberger Morgen hält 200 Quadr. Ruth.
Preussischer Morgen — 180 — —
Rheinländ. Morgen — 120 — —
— Waldmorg. — 160 — —
— Juchart — ½ Morgen
Sächsischer Morgen — 120 Quadr. Ruthen.
— Acker — 2 Morgen
— Hufe — 12, 20, 24 bis 30 Acker
— Näßel Landes hält 7½ Acker
Würtemb. vormal. Tagewerk hält 225 Qu. Ruth.
— — Morgen — 150 — —
— gegenw. Morgen — 384 — —
Würzburg. Feldmorgen — 160 — —
— Waldmorgen sonst — 180 — —
— — gegenw. — 160 Nürnb. Qu. R.

Wollte man die Größe irgend eines Morgens mit dem neufranzösischen Hectare = 100 Ares carrés, vergleichen:

so muß man sich hiezu der obigen Vergleichungstafel der verschiedenen Fußmaße bedienen mit Rücksicht auf folgende Bestimmungen:

Eine Linie alt franz. Längenmaß	ist = 0,002255	Mètres.
Ein Zoll	= 0,02707	—
Ein Schuh	= 0,32484	—
Eine Toise	= 1,94904	—

Wir wollen das hier zu beobachtende Verfahren durch ein einziges Beyspiel erläutern. Der Würzb. Schuh hat 291,827 Millimét., also 0,291827 Mètr.; folglich die Würzb. Ruthe, oder 12′ = 3,501924 Mèt.; die Würzb. Quadratr. daher = 12,2635 Mèt. car.; endlich der Würzb. Morgen = 160 Qu. Ruth. hat 1962,1645 Mètres car. oder 19,6216 . . Ares; also beynahe 20 Ares, oder 20 neufranz. Quadratruthen. Da aber 1 Are = $\frac{1}{100}$ Hectare: so ist der Würzb. Morgen beynahe $\frac{1}{5}$ des neufranz. Arpent. 46 Hectares machen fast ganz genau 135 Baier. Jucharte oder Tagewerke.

Will man wissen, wie sich die Morgen an zwey verschiedenen Orten gegeneinander verhalten, z. B. der Würzburg. zum Bamberger Feldmorgen: so ist ihr erster gemeinschaftlicher Vergleichungspunkt die Anzahl der Linien (od. Millimèt.), welche vom Par. Fuße auf einen landesüblichen Würzb. und Bamberger Fuß gehen. Man suche nun, z. B. mit Hilfe der Kettenregel, wieviel Par. Fuß 12 Würzburger Fuß (= 1 Ruthe) machen; eben so in Betreff von 20 Bamb. Fußen. Hier hat man

I.

x par. F.	12 W. F.
1 W. F.	129,366 par. Lin.
144 par. Lin.	1 par. F.

II.

x par. F.	20 Bam.
1 B. F.	124,3 par. Lin.
144 par. Lin.	1 par. F.

Es ist also 1 Würzb. Ruthe $= \frac{12.129,366}{144}$ par. Fuß;
also die Würzb. Quadr. Ruthe $= \frac{12^2.129,366^2}{144^2}$ par. Qu. Fuß. Daher der Würzb. Morgen $= \frac{160.12^2.129,366^2}{144^2}$.
Eben so ist der Bamberger Feldmorgen $= \frac{150.20^2.124,3^2}{144^2}$.
Es verhält sich folglich der W. M. zum B. M. $= 160.12^2.129,366^2 : 150.20^2.124,3^2$ (§. 138. Zusatz). Es ist also

$$1 \text{ B. M.} = \frac{150.20^2.124,3^2}{160.12^2.129,366^2} \text{ W. M.}$$

Durch einen beschwerlichen Calcul findet man hieraus 1 B. M. $= \frac{927029400}{385587943,58..} = 2,404$ W. M. beynahe; d. i. 1 Bamb. Morgen Felds beträgt beynahe $2\frac{2}{5}$ hiesige Morgen.

Weit kürzer werden diejenigen, die mit Logarithmen zu verfahren wissen, jenes Beyspiel folgendermaßen berechnen: Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \log. 150 &= 2,1760913 \\ 2. \log. 20 &= 2,6020600 \\ 2. \log. 124,3 &= 4,1889422 \\ \hline \log \text{ der Sum.} &= 8,9670935 \\ \log. 160 &= 2,2041200 \\ 2. \log. 12 &= 2,1583624 \\ 2. \log. 129,366 &= 4,2236404 \\ \hline \end{aligned}$$

log. der Sum. $= 8,5861228$. Die Differenz dieser zwey gesuchten Logar. der Sum. ist 0,3809707, welchem Logar. die Zahl 2,4042 . . entspricht.

Auf dieselbe Art reduzirt man das Feldmaß irgend eines Ortes auf das an irgend einem andern, sobald man die nöthigen Data, wie in unserm Beyspiele, in Betreff jener Feldmaße weiß.

Wenn ferner diese Data wieder in Zahlen desselben dritteren gleichnamigen Flächenmaßes bestehen: so ist die Rechnung wieder am kürzesten auf die Art, wie vorhin, rücksichtlich der Ruthen, zu führen. So haben wir oben den Würzb. Waldmorgen (mit Nürnb. Ruthe, = 12′, gemessen) zu 2125,8524 Centiares, den baierischen Juchart aber zu 3407,2718 Centiar. bestimmt. Demnach verhält sich 1 Würzb. Morgen zum baier. Tagewerke, wie 2125,8524 : 3407,2718, d. i. 34 Würzb. Morgen gleichen sich fast mit 21 baier. Tagewerk ab; oder da $\frac{3407,2718}{2125,8524} = 1,602 \ldots$ ist: so ist 1 baier. Tagw. beynahe 1,6 Würzb. Morgen, oder 10 baier. Tagew. machen sehr nahe 16 unserer Waldmorgen, (die Ruthe = Nürnb. 12′ und den Morgen = 160 □ruthen gesetzt).

Hieher gehören noch folgende 2 Aufgaben, die auf ähnliche Art, wie vorhin, gelößt werden können, nämlich:

1) **Wieviel Morgen neuen Maßes hält ein im alten Maße bestimmter Wald?**

Es sey dieser z. B. zu 100 Morgen alten Maßes angegeben, indem man nämlich mit einer Ruthe = 12 Würzb. Fuße gemessen, und den Waldmorgen = 180 Würzb. □ruthen gesetzt hat. Nun wird aber gegenwärtig jeder Wald mit der gesetzlichen Ruthe = 12′, der Fuß = 134,65 par. Lin. gemessen, und der neue Waldmorgen hat gesetzlich nur 160 solcher □ruthen.

Es ist also 1 alter Waldmorgen $= \frac{180 . 12^2 . 129,3661^2}{144^2}$ par. □fuß und 1 neuer Waldmorgen $= \frac{160 . 12^2 . 134,65^2}{144^2}$ par. □fuß. Also neuer Waldm. zum alten

$$= 160 . 12^2 . 134,65^2 : 180 . 12^2 . 129,3661^2$$
$$= 8 . 134,65^2 : 9 . 129,3661^2,$$
$$= 145044,98 : 150620,29 \text{ beynahe.}$$

Daher 150620,29 neue Waldmorgen = 145044,98 alte Waldm.

Nach der Kettenregel steht also die Auflösung unserer Aufgabe so:

x neue Waldmorg.	100 alte Waldm.
145044,98 alt. W. m	150620,29 neue Waldm.
x =	103,91

Demnach machen 100 alte Waldmorgen beynahe 104 neue Waldmorgen.

2) **Wieviel beträgt ein Stück Feld, welches mit zu Grundlegung desselben Fußes in demselben Lande, aber mit kleinerer oder größerer Ruthe vermessen worden ist, vermöge eben dieses veränderten Ruthenmaßes?**

Beyspiel. Die königl. par. Ruthe betrug ehemals 22 Fuße, die gemeine nur 18 F., und der franz. Morgen durchaus nur 100 Quadratruthen, wobey aber immer derselbe Fuß = 144 par. Lin. oder = 1440 Skrupeln zum Grunde lag. Man setze nun, man habe ein Stück Feld, mit der königl. Ruthe gemessen, = 1 Morgen (arpent), 70 □ruthen, 30 □fuß, 75 □zollen gefunden, und suche nun, wieviel dieses Stück Feld im gemeinen Maße, die Längenruthe = 18′, betrage; so müßte man auf folgende Art die Rechnung führen:

Schuhe und Zolle bleiben; aber $22^2 = 484$ □fuß = 1 königl. □ruthe, und $18^2 = 324$ □fuß = 1 gemeinen □ruthe; da demnach 324 königl. □ruthen gleich sind 484 gemeinen □ruthen: so kann man nun nach der Kettenregel setzen:

x gemeine Qu. ruthen	170 königl. Qu. ruth.
324 königl. Qu. ruth.	484 gem. Qu. ruth.
x =	253,95 beyn.

Daher jenes Stück Feld im gemeinen Maße = 2 Morgen 54 Qu. ruth. 14 Qu. fuß und 45,7 Qu. zollen.

Allein wenn wir bey der vorigen Aufgabe unter 1) annehmen, daß sonst die Waldungen bey uns in der Regel mit einer Ruthe = 12 Nürnb. Fußen vermessen wurden: so findet man durch eine leichtere Rechnung, daß

a) 1 solcher alter Würzb. Waldmorgen à 180 □ruthen = 1,125 neuen Waldmorgen (nach dem von Hrn. Hauptmanne Dumonceau gefertigten Etalon eines Nürnberger F.);

b) derselbe alte Waldmorgen = 0,7019 baierischen neu gesetzlichen Tagwerken, oder daß

c) 1 baier. gesetzliches Tagw. = 1,4247 alten Würzb. Waldmorgen sey.

c. Körpermaß.

Man unterscheidet hier das Maß für geometrische Körper, und das für flüssige und trockene Waare. Für jene wählte man allgemein den Würfel, oder wieder einen Körper, der von 6 gleichen Seitenflächen begränzt ist, deren jede ein Quadrat bildet. Aber zum körperlichen Maßstabe flüssiger Waaren hat man gewöhnlich den Cylinder, und zu großen Quantitäten bauchigte Gefäße gewählt. Das körperliche Maß für die Getreidearten ist, da die Körner etwas ähnliches mit der flüssigen Waare haben, eben auch gewöhnlich der Cylinder, weil cylindrische Gefäße größere Festigkeit gegen den äußern Stoß haben, und die bauchigten Gefäße zugleich leichter zu wälzen sind.

1. Maß für geometrische Körper.

Hier wird der körperliche Inhalt irgend eines Würfels als Einheit angenommen, und man sagt, ein Körper sey ausgemessen, oder der körperliche Inhalt z. B. einer Mauer, eines Eichstammes sey gefunden, wenn man bestimmt hat, wieviel jener Einheiten irgend ein Körper enthält.

Das körperliche Maß erhält seinen Namen von dem Längenmaße, dessen man sich zur Ausmessung der Seite irgend eines der Quadrate dieses Würfels bedient. Daher die Benennung von Kubikruthen, Kubikschuhen, Kubikzollen u. s. w.

Nach der Dezimaleintheilung ist 1 Kubikruthe = 10^3 = 1000 Kubikschuh, 1 Kubikschuh = 10^3 = 1000 Kubik-

zolle u. s. w. Es hält also 1 Kubikruthe 1000000 Kubikzolle, oder 1000000000 Kubiklinien. Hiebey ist noch die Benennung Schach = 10 Ruthen, und Balken = 100 Schuhen zu merken.

Eine Duodezimal-Kubikruthe hingegen ist = 1728 Kubikschuh und 1 Kubikschuh = 1728 Kubikzoll u. s. w.; folglich hat 1 Kubikruthe 2985984 Kubikzolle.

Die Dezimaleintheilung hat, wie bey der zehntheiligen Eintheilung des Längen- und Flächenmaßes, auch hier wieder ihre große Vortheile für die praktische Rechnung, indem man die Anzahl von Kubikruthen oder Kubikzoll. und Kubiklin. leicht in eine gleiche Zahl niederer Art, und umgekehrt die Anzahl von Kubikzoll. oder Kubiklinien leicht in eine gleiche Zahl der höheren Art verwandeln kann. Hat man z. B. die Dezimalzahl 234,87325 Kubikfuß: so ist 0,87325 Kubikfuß = 0,87325. 1000 = 873,25 Kubikzoll (§. 109); endlich 0,25 = 0,250 Kubikzoll = 0,250. 1000 = 250 Kubiklinien. Man hat also 234 873''250''' im Kubikmaß; d. i. um eine solche Zahl richtig in immer kleineren Theilen des kubischen Maßes anzugeben, darf man nur die Dezimalziffern von der Linken zur Rechten von 3 zu 3 Ziffern ganze Zahlen von stufenweise niederer Art bedeuten lassen. Zugleich ist aus dem Vorigen klar, daß jene Zahl in ihrem letzten Ausdrucke, auf eine gleiche Zahl der niedrigsten Art zurücke gebracht, 234873250 Kubiklinien ausdrücke. Wäre daher diese letzte Zahl gegeben: so verwandelt man sie umgekehrt in Zahlen der nächst höheren Art, wenn man je 3 Ziffern von der Rechten zur Linken Zahlen von stufenweise höherer Art bedeuten läßt (man vergl. §. 254. Anm.).

Um das Dezimalkubikmaß auf das Duodezimalkubikmaß, und umgekehrt, zu reduziren, bedient man sich ähnlicher Formeln, wie oben unter α. beym Längenmaße und beym Flächenmaße. Ist nämlich die Ruthe einerley, und bedeutet m Dezimal- und w Duodezimalmaß: so ist

$1000 m' = 1728 w' = 1$ Kubikruthe

$1000000 m'' = 2985984 w'' = 1$ Kubikruthe

Daher $m' = 1{,}728 w'$; $w' = 0{,}5785 m'$

$m'' = 2{,}985984 w''$; $w'' = 0{,}3348979 m''$

Sind die Fuße einerley: so ist leicht ersichtlich, daß man in den vorigen Formeln oder Reduktionssätzen n' statt m'; w'' statt w'; n'' für m'', und w'' für w''; und 1 Kubikfuß für 1 Kubikruthe setzen könne (man vergl. hier II. unter *).

Beyspiel zur Reduktion dieser Art: Man soll 742,93104 Dezimalkubikruthen auf Duodezimalmaß reduziren. Hier bleiben die Ruthen. Aber $931040 m'' = 931040 . 2{,}985984 w'' = 2780070{,}54336 w''$. Da nun $1728'' = 1'$: so findet man durch Division mit jener Zahl die Kubikfuße. Es ist nämlich $\frac{2780070}{1728} = 1608$ Kubikfuß; bleiben aber Rest 1446,54336 Kubikzolle. Obige Zahl ist also im Duodezimalmaße $742^{\circ}\ 1608'\ 1446{,}55 \ldots''$.

Um ferner die Kubikfuße verschiedener Orte auf einander wechselseitig zu reduziren: so sind hier die Würfel jener den Fußen in der Tabelle beygeschriebenen Zahlen (welche die Anzahl der par. Linien ausdrücken), die Verhältnißzahlen. Es verhält sich z. B. der Würzb. Kubikfuß zum Baier. $= 129{,}3661^3 : 129{,}38^3$; folglich sind $129{,}38^3$ Würzb. Kubikfuß $= 129{,}3661^3$ Baier. Kubikfuß. Daher, wenn man finden wollte, wieviel Baierische Kubikfuß 4898 Würzb. Kubikf. machen, hat man hier, auf ähnliche Art, wie oben bey dem Flächenmaße:

$$x = \frac{129{,}3661^3 . 4898}{129{,}38^3} \text{ Baier. Kubikf.}$$

Eben so findet man auch die Größe eines Kubikf. gegen den altfranzösischen Kubikf., indem man die kubirte Verhältnißzahl für den ersten Fuß durch den Würfel von 144 dividirt. So ist 1 baier. Fuß $= \frac{129{,}38^3}{144^3}$ par. Kubikf.

Dasselbe gilt auch von Kubikzollen: so ist 1 baier. Kubikzoll $= \frac{129,38^3}{144^3}$ par. Kubikzoll, vorausgesetzt, daß beyde nach der 12theiligen Eintheilung genommen werden.

Allein man setze: man wolle wissen, wieviel par. Duodezimalkubikzolle 43 baier. Dezimalkubikzolle machen. Um dieß auszumitteln, hat man zwey direkte Wege: 1) da 1 baier. Fuß = 10 Dezimalzollen = 12 Duodezimalzollen = 129,38 par. Linien; so ist auch 1 baier. Kubikf. = 10^3 = 12^3 Kubikzoll = $129,38^3$ par. Linien, d. i. 1000 Dezimalkubikzoll = 1728 Duodezimalkubikzoll = $129,38^3$ par. Kubiklinien, oder 1 Dezimalkubikzoll = 1,728 Duodezimalkubikzoll = $\frac{129,38^3}{1000}$ par. Kubiklinien. Wenn man demnach 129,38 zum Würfel elevirt, diese Zahl mit 43 multiplizirt, durch 1000 dividirt, und den Quotienten, um die Kubiklin. in Kubikzolle zu verwandeln, nochmals durch 1728 dividirt: so findet man, daß jene 43 baier. Kubikzolle 53,8922 par. Duodezimalkubikzolle machen.

2) Man findet dasselbe, wenn man nach der Kettenregel setzt:

1 par. Duod. kubik.-	43 baier. Dezimalkub. z.
1000 dieser Zolle	1 baier. Kubikf.
1 baier. Kub. f.	$129,38^3$ par. Kub lin.
144^3 solcher Lin.	1 par. Kubikf.
1 par. Kubikf.	12^3 par. Duod. kub. z.

Kubirt man endlich jene Verhältnißzahlen, welche wir bey dem Flächenmaße quadrirten: so findet man das Verhältniß der Kubikruthen an verschiedenen Orten. So verhält sich die Würzb. Kubikruthe zur Nürnb. Kubikruthe wie $12^3 . 1293661^3 : 16^3 . 1346540^3$.

Hieher gehört nun die im bürgerlichen Leben nöthige Kenntniß des

Holzmaßes.

Man nennt das Holzmaß auch Holzesche, und das Klafter Holz bey uns einen Reif. Die Holzeiche für den Waldreif hat zu Würzburg, wie oben schon gesagt wurde, 5 Schuh Höhe nebst einem Scheit Uebermaß, und 5 Schuh Breite nach dem Nürnberger Fuße. Also das Klafter Holz, das 3 Schuh lang ist, hat bey uns 75 Kubikschuh. An mehreren Orten hat aber die Holzeiche für den Waldreif auch 6 Schuh Höhe und 6 Schuh Breite, das Holz selbst $3\frac{1}{2}$ Schuh Länge, also das Klafter 126 Kubikschuhe. 10 Waldreife machen in Würzburg 11 Karren. Hiezu wurde auch für das hiesige Holzmagazin die Würzburger Stadt-Holzeiche nach dem Würzb. Fußmaße eingerichtet. Diese sollte nach der genauesten Berechnung 4 Schuh 6 Zoll in der Breite, und 5 Schuh 5 Zoll 7 Striche in der Höhe haben; aber sie wurde für den Holzkarren auf eine Breite von $4\frac{1}{2}$ Schuh, und eine Höhe von $5\frac{1}{2}$ Schuh festgesetzt.

An denjenigen Orten, außerhalb Franken, wo man das Brennholz nach Klaftern rechnet, wird dieses meistens 6' lang und hoch bey 3schuhiger Holzlänge angenommen; wobey der Schuh jedes Ortes als Maß gebraucht wird. Solche Klafter an zwey verschiedenen Orten verhalten sich daher wie die Würfel jener den Fußen dieser Orte beygeschriebenen Zahlen der par. Linien. Dadurch erhält man die Reduktionszahlen, vermittels welcher man findet, wieviel Klafter an einem Orte eine gewisse Anzahl an dem andern giebt.

Wenn das Waldklafter 75 Kubikschuh hat: so rechnet man für den Zwischenraum 8 Kubikschuhe, so, daß man nur 67 Kubikschuh Stammholz zu 1 Klafter nöthig hat. Rechnet man aber 126 Kubikschuh auf 1 Klafter: so zieht man 13/48 Kubikschuhe für den Zwischenraum ab. Rechnet man nur noch auf 25 Klafter Stammholz 5 Klafter Armholz von den Aesten: so sieht man, wie Waldeigenthümer irgend ein Stück Waldes taxiren können.

In Frankfurt ist das Gilbert Brennholz = 2 Stecken = 75⅜ frankf. Kubikfuß = 1,8752 Stéres mit den Auflegescheitern, indem nämlich dem Stecken Holz, am Maine gemessen, 7, aber im Magazin gemessen, 2 Scheiter zugegeben werden. Die Scheiterlänge ist hiebey zu 3′ angenommen.

Mit den Auflegescheitern machen 39 Aschaffenburger Stecken 40 frankf. Gilbert, und 77 = 79. Aber ohne jene Scheiter mit in Rechnung zu bringen, sind 10 Aschaffenb. Stecken = 11 frankf. Gilbert; 79 St. = 87 G.; 168 St. = 185 G.

Das gewöhnliche frankf. Klafter (3′ Scheitlänge) ist = 108 frankf. Kubikfuße = 2,48959 Stéres; das Klafter Holz à 4′ Scheitlänge = 144 Kubikfuße = 3,31946 Stéres. 4 Klafter machen 1 Stos Holz, und 10 gewöhnliche Klafter 13 Aschaffenb. Stecken.

Anmerkung. Für Franken sind noch die Holländer Holzsorten mit ihrem Mittelpreise, so, wie sie ehemals statt hatten, bemerkenswerth. Ein ganzer Holländer Baum à 24 Rthlr. muß 30 Schuh Länge und 24″ (Holländer Fußmaß) im mittleren Durchmesser haben; ein Halbbaum hat unter 30—25′ Länge, und im mittleren Durchmesser 24 Zoll; er wird um 20 Rthlr. verkauft. Weil das holl. Fußmaß kleiner ist, als das würzb.: so giebt nach letzterem Maße ein Halbbaum von 26′, 27′, 28 Sch. einen ganzen holl. Baum, wenn jener im mittlern Durchmesser 20—24″ groß ist.

Kleinere holl. Holzsorten sind:

1 Pfeiffer, 10′ lang, 13′ hoch und 22″ breit;
1 Knapper, 8′ — 12′ — — 20″ —
1 Ranzen, 6′ — 11′ — — 18″ —
1 Wagenschuß, 14′ lang, 14′ hoch und 24″ breit;
1 Kloß ist 18—24 Schuh lang, 20—24″ breit;
6 Ranzen (à 13 Rthlr.) ist ein Stück Holz;
3 Klötze gelten für einen Baum.

2. Hohlmaß

a. für flüssige Waare.

Erstens in Würzburg. Nach Huberti's Untersuchung hält das Würzb. Stadt-Aichmaß 59,1096 par. Kubikzolle. Demnach ist der Inhalt des Eimers à 64 Aichmaßen = 3783,0144 par. Kubikzolle. Das Fuder à 12 Eimer = 45396,1728 par. Kubikzolle. Das Nähere hierüber, was ich durch eigene Untersuchung der Matrix fand, und als das Genauere festsetzte, wurde schon oben angeführt.

Zweytens in Baiern. 1 baier. Kannenmaß hat 53,8922 par. Kubikzolle oder 43 baier. Dezimalkubikzolle. 64 baier. Maßkannen machen 1 Eimer, oder 68,418 Litres. Es ist daher 1 Würzb. Fuder oder 12 Eimer 13,134 baier. Eim.

Drittens in Nürnberg (ehemals). 1 Nürnb. Eimer (Visirmaß) hält 32 Viertel, oder 64 Maß, oder 128 Seidel; aber der Eimer Schenkmaß hat 68 Maße oder 272 Schoppen. Der Eimer hat 3714,538 par. Kubikzolle; das Visirmaß folglich 58,04 par. Kubikzolle.

Viertens in Bamberg (ehemals). Das Wein- und Biermaß wird in Bamberg eingetheilt, wie in Würzburg; hier wie dort rechnet man auch auf 1 Eimer 72 Schenkmaße. Nach Angabe des Bamberger Prof. Roppelt hat der Bamb. Eimer 6048 Nürnberger Kubikzolle, oder das Visirmaß 94,5 Nürnb. Kubikzolle, woraus man, den Nürnb. Fuß zu 134,654 par. Linien angenommen, 77,26843 par. Kubikzolle für das Bamb. Aich- oder Visirmaß, und demnach 1 Würzb. Eimer = 1,3089 Bamb. Eimer durch Rechnung findet. Diesen Daten gemäß macht 1 Bamb. Fuder 15 Würzb. Eimer und 46 Maße. Roppelt giebt nur 12 Maße über jene Einerzahl.

Fünftens in Anspach (ehemals). 1 Eimer hat daselbst 66 Maß, oder 132 Seidel, oder 264 Schoppen. Der Anspacher Eimer hat ferner 4511 par. Kubikzoll, das Maß 68,348 par. Kubikzoll. Der Anspacher Eimer hält daher 1 Würzb. Eimer und 12,3 Maße.

Wir fügen nun noch einige der merkwürdigsten Flüssigkeitsmaße bey: P. bedeutet pariser, und R. rheinländ. Kubikzolle:

Amsterdam 1 Pot = 2 Pinten = 60 P. = 66,6 R., deren 2 ein Stoof; 8 St. — 1 Steckan; 2 St. = 1 Anker.

In Aschaffenburg hat das Aichviertel à 4 Aich, od. Ohmmaß 400,093 par. Kubikzolle oder 7,9364 Litr., also die Aichmaß = 100,023 par. Kubikzoll = 1,9841 Litr. und 91 Aichmaß = 99 Zapfmaß, oder 216 = 235.

Berlin. Hier, wie im größten Theile der Preußischen Lande, liegt das Quartmaß zum Grunde. Nach des Oberbauraths Eytelwein sorgfältigen Untersuchungen dieser Berl. Probequarte ist ein Quart = 59 P. = 65,415 R. Bey dem Weinmaße ist 1 Anker = 32 Quart; 2 A. = 1 Eimer; 2 E. = 1 Ohm; 1½ Ohm = 1 Oxhoft; 4 O. = 1 Stückfaß.

Bremen 1 Stübchen = 4 Quart = 160 P.

Dänemark 1 Pott = 48,7 P. = 54 R.; 30 Pott = 1 Anker.

Danzig 1 Stoof Wein = 86,3 P. = 93 R.

Frankfurt a. M. Fuder Wein von 6 Ohm = 120 Viertel = 480 Maß = 1920 Schoppen, 8 Ohm, oder wegen des Trubs (oder Bodensatzes) 8 Ohm, 1 Viertel machen 1 Stück Wein. Man hat übrigens ein altes Maß (dessen sich die Weinhändler, Branntwein- und Oelverkäufer bedienen) und ein neues oder junges Maß, bey Wirthen, Apothekern, Milchverkäufern &c. gebräuchlich. Die Ohm hat 80 alte, und 90 neue Maße, so, daß 8 alte Maße 9 neue machen. Das alte Maß aber reinen Regenwassers bey 5 Grad Wärme der 80theil. Reaum. Skale wiegt in der Luft 122,47 frankf. köln. Lothe, ist also = 1,7927 Litr.; das neue Maß = 1,5935 Litr.; oder jenes = 134⅜; dieses = 119⅝ frankf. Kubikz. . . Das Ohm also = 10750 frankf. Kubikz. = 143,414 Litr.

Fuld. 1 Eimer = ½ Ohm = 40 Maß = 160 Schoppen = 3683,63 par. Kubikz. = 7306,98 Centilitr.; die Maß also = 92,091 P. (nach Prof. Heller).

Hamburg 1 Ahm von 4 Anker = 5 Eimer = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Quartier = 7300 P. = 8096 R.

London 1 Tun oder Tonne von 2 Pipes = 3 Punchions = 4 Hogsheads = 6 Tierces = 8 Barrels = 14 Kilderkins = 252 Gallons = 504 Pottles = 1008 Quarts = 2016 Pints = 48134 P.; die Weinpint = 50,6 R.

Paris n. M. 1 Litre = 56 R. beyn. Altes Maß — 1 Pinte = 53,23 R., 2 P. = 1 Pot; 4 P. = 1 Sétier; ½ Pinte = 1 Chopine; 1 Muid = 36 Sétiers = 13521,33591 = P. Kubikz. 1 Muid wurde eingetheilt in 2 Feuillettes, 1 Feuil. in 18 Veltes, 1 Velte in 8 Pintes.

Regensburg (nach Heinrich):

1 Achterl = 5¼ par. Kubikzoll:
1 Quartl = 10½ — —
1 Seidl = 21 — —
1 Köpfel = 42 — —

1 Eimer zu 60 Köpfel = 2520 par. Kubikzolle:
1 Visireimer zu 64 — = 2688 — —
1 Bergeimer zu 68 — = 2856 — —
1 langer Eim. zu 88 — = 3696 — —

Spanien: 1 Weinquartillos = 27,5 R.; 32 Qu. = 1 Arrobas; 27 Ar. = 1 Pipe; Oelquarteron = 172 R.; 4 Qu. = 1 Arrobas.

Ungarn: Weinmaß; 1 Eimer = 4100 R. = 63 Berliner Quart beyn.; Oberung. Anthal = 61 Berl. Quart; Niederung. Anth = 2812 R. Anthal Tokayer = 43 Berl. Quart beyn. = 2825 R. = 2548 P.

Wien 1 Eimer zu 40 Maß oder Kannen à 4 Seitel Weinmaß = 1,792 Kubikfuß = 2353,38 par. Kubikzolle = 5660 Centilitres; 1 Faß = 10 Eimer; 1 Dreyling = 30 Eimer.

b. Hohlmaß für trockene Waare.

Erstens in Würzburg. Das Nöthige wurde schon oben angeführt. Für Fuld bemerke ich blos, daß das Getreidmaß nach einer, dem genannten Prof. Heller mitgetheilten, offiziellen Nachricht = 1103,5 (nicht, wie Huberti gefunden hat, = 1110,18) par. Kubikz. seyn soll. Das Malter hat 8 Maß; 1 M. = 4 Metzen; 1 M. = 4 Köpfchen.

Rücksichtlich des neuen Münchner Getreidmaßes haben wir oben schon die nothwendigen Verhältnißzahlen, so wie die Vergleichungen des Würzb. Getreidmaßes mit dem neuen Baierischen angegeben.

Zweytens in Frankfurt ist das Achtel oder Malter = 4 Simmer = 8 Mesten = 16 Sechter = 64 Gescheid, und das Gescheid, die Einheit des Getreidmaßes, wird noch in halbe und Viertelsgescheid eingetheilt. Mit dem Simmer, als größtem Gemäß, werden alle Arten von Getreide (welche insgesammt dasselbe Maß haben,) gemessen.

Von den im J. 1806 gefertigten neuen Muttermaßen hält das gestrichene Gescheid das oben angeführte alte Maß, und das gestrichene Simmer ist = 16 solcher Maße, demnach = 28,683 Litr. und das Malter = 5784 par. Kubikz. = 114,732 Litr.

Ich führe die nun folgenden Getreidmaße an, indem sie gegenwärtig, ungeachtet in einzelnen Ländern, wie in den Königreichen Baiern und Würtemberg, neue Maße eingeführt sind, doch noch einiges Interesse haben.

Von dem Aschaffenburger Getreidmaß bemerke ich, daß dasselbe noch nicht genau bestimmt sey, indem Hr. Chelius das Kornmaß zu 868,31, das Habermaß zu 1087,57 par. Kubikz. (Nachrichten zu Folge), Huberti aber das erste zu 881,89, das zweyte zu 1102,25 par. Kubikz. (nach einem hölzernen Original) angiebt. Beyde Angaben sind in der That, auch von Hubertis zu kleinem Maßstabe abgesehen, zu different, als daß ich mit Chelius das Mittel aus beyden auch nur für wahrscheinlich annehmen möchte.

Drittens in Bamberg. Die Bamb. Simmer oder Simra Korn, Waitzen, Erbsen, Linsen, Wicken hält nach Prof. Roppelt's Angabe 4824 Nürnb. Kubikzoll, folglich 3989,3436 par. Kubikzoll. Die Simra Gersten, Haber, Hirs, Hanfkörner, Haidel hält nach desselben Angabe 5904 Nürnb. Kubikzoll, folglich 4827,4056 par. Kubikzoll. Es ist ferner 1 Sim. = 4 Vierlinge = 40 Galßel.

Viertens in Nürnberg. Die Nürnberger Simra für Korn hat 16 Metzen oder 256 Maß; die für Haber 32 Metzen oder 576 Maß. Man unterscheidet das Urmaß und das Handelsmaß d. i. dasjenige, dessen man sich in Nürnberg nur bey Einnahmen grundherrlicher Zehnten und Gülten bediente, von dem Maße, das man im Handel gebraucht. Die Habersimra (Urmaß) hat 30388,24 par. Kubikz.; die Kornsimmer (Urm.) 16336,05 par. Kubikzoll. Die Habersimra (Handelsm.) hat 29746 par. Kubikz. und die Kornsimra (H. sm.) 16084 par. Kubikz.

Es ist daher eine Nürnb. Kornsimra (H. sm.) = 1 Würzb. Kornmalter + 6 Metzen + 2 Viertel + 3 16tel + 0,5 64tel; und 1 Nürnb. Habersimra (H. sm.) = 1 Würzb. Habermalter + 5 Metzen + 2,3984 Viertel.

Fünftens in Regensburg (nach Heinrich) ist der gesetzliche kubische Inhalt der Getreidmaße folgender:

1 Schaff	= 32 Metzen	= 704 Köpfl.	= 29568	par. Kubikz.
½ —	= 16 —	= 352 —	= 14784	— —
¼ Schaff) 1 Mäß) 1 Muth)	= 8 —	= 176 —	= 7392	— —
⅛ Schaff) ½ Mäß) 2 Viertel)	= 4 —	= 88 —	= 3696	— —
1 Vierling	= 2 Metzen	= 44 —	= 1848	— —

Der Metzen wird stufenweise herab bis zu $\frac{1}{12}$ Metz. halbirt. Das Schaff Haber ist = 56 Metzen = 51744 par. Kubikz.

Sechstens in Anspach. Die neu Ansp. Kornsimmer hält 16 Metzen oder 256 Maß und hat 17043 par. Kubikz.; die neu-Ansp. Habersimmer hält 32 Metzen oder 576 Maß und hat 31464 par. Kubikzoll.

Siebentens in Augsburg

1 Vierling = 323,682 par. Kubikz.
1 Metzen = 4 Vierl. = 1293,682 — —
1 Schaff = 8 Metz. = 10349,456 — —

Achtens in Eichstädt für alle Sorten

1 Metzen = 1875 par. Kubikz.

Bey Waitzen und Korn 1 Muth = 2 Schäffel = 32 Metzen = 6000 par. Kubikz

Bey Gersten und Dinkel hingegen ist 1 Muth = 38 Metzen = 71250 par. Kubikz.

Und 1 Habermuth = 46 Metz. = 86250 par. Kubikz.

Einige der merkwürdigsten hieher gehörigen Maße sind in nachstehender Tafel enthalten:

	P. K. z.		P. K. z.
Berlin Scheffel*) oder $3052\frac{1}{1}\frac{3}{4}$ rh. K. z.	$2757\frac{1}{2}\frac{9}{1}$	London Quarter = 8 Bushels	14408
Böhmen Strich zu 4 Viertel	4718,5	Lübeck Schfl. = 4 Fässer	1684
Bremen Scheffel à 4 Viertel	3585	- Habermaß	1978
Breslau Schfl.	3730	Paris ehem. Muid = 12 Setiers = 48 Minots = 144 Boisseaux****)	94465
Dänem. Tonne zu 8 Sch.	7013	Rußland Tscheswert = 2 Osminen	10440
Danzig Schfl. zu 16 Metzen	2452	Schweden Tonne = 8 Viertel	8310
Dresden Schfl.	5304,46	nach Paucton	8176
Frankf. a. M. Malter zu 4 Simmer**)	5784	Spanien Fanega	2877
Fuld Malter	8828	Triest Stara	3735
Hamburg Sack = 4 Faß	10624	Wien Muth = 30 Metz. zu 8 Achtel	92836,732
Leipzig Schfl. = 16 Metzen***)	5338	Wismar Schfl.	1930

*) Dieser hat 4 Viertel, oder 16 Metzen, oder 64 Mäßchen. 24 Schfl. machen 1 Wispel.

**) Die Simmer = 2 Mesten = 4 Sechter = 16 Gescheid.

***) Dieser Sch. wird von andern viel höher angegeben, z. B. Mayer (im 5. Th. f pr. Geo.) giebt ihm = 7006, u. Paucton = 6939.

****) 1 Boisseau (= 656,006687 par. Kubikz.) war = 16 Litrons, und 1 Litron = 41 par. Kubikz.

Anmerkung. Weil es bey dem Getreidehandel vorzüglich auf das Gewicht ankömmt: so hat man in Seestädten Getreidwagen, d. i. Gemäße von Kupfer, welche ein Mäßchen oder $\frac{1}{32}$ vom Schäffel enthalten. Man füllt das eine mit Getreide, und legt bis zum Gleichgewichte in das andere halbe Lothe. Das Schäffel wiegt folglich soviel Pfund als das Mäßchen halbe Lothe.

XI.

Vom Gewichte.

Zur Gewichtseinheit hat man das Pfund angenommen, welches in kleinere Gewichte, Mark, Unzen, Lothe u. s. w. eingetheilt wird, und woraus größere Gewichte, Steine, Liespfund, Zentner u. s. w. zusammengesetzt werden.

Die gewöhnliche Eintheilung ist folgende:

Zentner	Pfund	Loth	Quintchen
1 Zentner	100	2300	12800
	1 Pfund	32	128
		1 Loth	4

1. Haupt- Handels- und Münzgewichte.

Eintheilung der für uns merkwürdigsten Gewichte:

1) Das Köllnische Markgewicht.

Mark	Unzen	Loth	Karat	Quintl.	Pfenning	Gran	Eschen	Richtpfenning
1 Mark	8	16	24	64	256	288	4352	65536
	1 Unze	2	3	8	32	36	544	8192
		1 Loth	$1\frac{1}{2}$	4	16	18	272	4096
			1 Karat	$2\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$	12	$181\frac{1}{3}$	$2730\frac{2}{3}$
				1 Quintl.	4	$4\frac{1}{2}$	68	1024
					1 Pfenning	$1\frac{1}{8}$	17	256
						1 Gran	$15\frac{1}{9}$	$227\frac{5}{9}$
							1 Eschen od. Aß	$15\frac{1}{17}$

Die kölln. Mark, als Gold- und Silbergewicht, wird auch etwas kürzer so eingetheilt: 1 Mark = 8 Unz = 16 Loth = 64 Quintl. = 256 Pfen. = 512 Heller = 4352 Eschen = 65536 Richtpfen.

2) Das französische Troygewicht.

Marc	Once	Gros	Denier	Grain	Primes ou carrobes
1 Marc	8	64	192	4608	110592
	1 Once	8	24	576	13824
		1 Gros	3	72	1728
			1 Denier	24	576
				1 Grain	24
					Primes

Als Silbergewicht wird diese Mark in 12 Deniers à 24 Grains, und als Goldprobegewicht in 24 Karat à 32 Theile eingetheilt.

3) Das holländische Troygewicht.

Mark	Unzen	Engel	Fierling	Troisken	Deurske	Aß
1 Mark	8	160	640	1280	2560	5120
	1 Unze	20	80	160	320	640
		1 Engel	4	8	16	32
			1 Fierling	2	4	8
				1 Troisken	2	4
					1 Deursken	2
						Aß

Anmerkung. Das Troygewicht hat seine Benennung von Troyes in Champagne erhalten, wo ehedem sehr ansehnliche Jahrmärkte gehalten wurden. Die Mark war anfänglich in Frankreich und Holland gleich. Man bedient sich indessen seit langer Zeit blos des holländischen Troygewichtes, so wie der köllnischen Mark als Maßstabes, nach welchem man die an anderen Orten eingeführten Gewichte miteinander vergleicht.

Nach einer, am 16ten Januar 1799 von einer eigenen Kommission genau angestellten, Untersuchung der köllner Mark, ist diese = 23386,19 Centigram. = 4402,953 altpar. Grain. = 4867,327 holl. Aß.

Es ist nämlich das ℔ des altfranz. Markgewichtes = 9216 Grains = 10188 holl. Aß. Nun hatte die genannte Untersuchung die kölln. Mark = 23369 provisorische Centigrammes gegeben. Das provis. neufranz. Pfund (Grave) war aber = 18841 altpar. Grain., oder 1 provis. Centigr. = 0,18841, aber 1 definitives ist = 0,1882715 Grains, also 1 provis. Centigr. = 1,000 73564 defin. Centigr. Demnach machen jene 23369 provis. Centigr. 23387,19117 definitiv, folglich 4402,553291 par. Grains.

Der genaueste Vergleichungspunkt der frankf. kölln. Mark mit der vorigen ächten Köllner ist nach Chelius, daß 8960 frankf. Marke 8963 kölln. M. machen, indem derselbe 1 frankf. Mark 23394,02 Centigram. oder 4404,43 altpar. Grains gleich setzt. Oder da nach Chelius Angabe das Kilogramm 280141 frankf. kölln. Richtpf. wiegt: so ist 1 frankf. kölln. Mark = 1,0003605327 kölln. Mark, indem dasselbe neufranz. ℔ = 280242 kölln. Richtpf. ist.

Wir lassen nun noch einige der für uns merkwürdigsten Gewichtsvergleichungen folgen:

a. Berliner Handelsgewicht. In diesem ist 1 Pfund = 2 Mark = 8.2 = 16 Unzen = 2. 16 = 32 Loth = 4. 32 = 128 Quentchen = 4. 128 = 512 Pfenning = 2. 512 = 1024 Heller = 128. 1024 = 131328 Richtpfenn. (denarius directorius) der Berl. kölln. Mark = 9751,5 holl. Aß. = 46851,6 Centigrammes. Die Berl. kölln. Mark ist nämlich nach Hrn. Eytelwein = 233,8115 Grammes = 4866,22 holl. Aß. = 65497 Richtpfen. der frankf. kölln. Mark (indem die frankf. kölln. Mark um 39 Berl. Richtpfenninge schwerer ist, als die Berl. kölln. Mark). Aufsteigend sind 110 Pfund = 5 Stein = 1 Zentner; 3360 Pfund = 240 Liespfd.; = 12 Schiffpfd. = 1 Last.

b. Das Köllnische Mark- und Münzgewicht wird auf gleiche Art eingetheilt, nur daß, wie wir aus der obigen Eintheilung sehen, das Pfund = 2 Mark nur 131072 Richtpfenninge hat; also das Berliner Handelspfund gerade 1 Pfenn. oder 256 Richtpfen., d. i. $\frac{1}{512}$ schwerer ist. Hr. Prof. Heinrich führt in der oben bemerkten Schrift mehrere Beweise für die Behauptung an, daß man sich einstimmig daran halten solle, daß die köllnische Mark sich zur holl. verhalte, wie 19 : 20, oder, nach köllnischen Richtpfenningen, wie 65536 : 68985.

c. Nürnberger Handelsgewicht. Das Nürnberger Pfund (= 32 Loth = 128 Quent.), deren 100 einen Zentner machen, hält 142821 Richtpfennigtheile, und vom Nürnberger Medizinalgewicht 17 Unzen, $\frac{1}{4}$ Drachma, $3\frac{1}{2}$ Gran, oder es hält $8208\frac{1}{2}$ Gran. Nun enthält das Nürnberger Medizinalgewicht 5760 Gran, wie wir weiter unten sehen werden, daher verhält sich das Handelsgewicht zum Medizinalgew., wie 82085 zu 57600. Dieß ist die gewöhnliche Vergleichsangabe des Nürnb. Handelsgewichtes. Allein nach den neuesten näheren Untersuchungen des Hrn. Salinenrathes Baader, welchen gemäß das fragliche Pfd., wie wir oben schon bemerkt haben, 10609,763 holl. Aßen hält, ist dasselbe Gewicht = 142952,596 kölln. Richtpfen., wenn man das Verhältniß der kölln. Mark zur holländ. wie 19 : 20 annimmt.

d) Das Troygewicht wird bey Münzen in Holland und Frankreich von der Mark abwärts gerechnet.

1. In Holland ist, wie wir sahen, 1 Mark = 8 Unzen = 160 Engel = 5120 As = 689850 Richtpfennigtheile der Köllnischen Mark = 68985,264 Berl. Richtpfennige.

2. In Frankreich ehemals 1 Marc = 8 Once = 64 Gros = 192 Deniers = 4608 Grains. Nach Hrn. Eytelwein ist 1 Once = 8575,36; 1 Pfund à 16 Onces = 137205,76; die Berliner Handelsunz. = 8208 Richtpfennige.

3. In England ist 1 Pound = 12 Ounces = 240 Penny Weigths = 5760 Grains. Hr. Eytelwein setzt nach Graham die Ounce = 8711,4758 Richtpfen. des Berliner Handelsgew. Demnach wäre 1 Pound = 104537¾ Richtpfennige.

Ich habe diese Münzgewichte zugleich mit den 2 für uns vorzüglich merkwürdigen Handelsgewichten dem Berliner und Nürnberger zusammengestellt und ihre Eintheilung erklärt, weil die Größe oder Verschiedenheit der Handelsgewichte an den meisten Orten Teutschlands nach einem der vorstehenden Gewichte bestimmt zu werden pflegt.

In Franken wird die Größe des Handelsgewichts beynahe durchgängig nach dem Nürnberger Handelsgewicht bestimmt.

Hinsichtlich des Würzburger Handels- oder schweren Gewichtes stellen wir die Angaben auf folgende Art zusammen:

Handelsgewicht (= dem Nürnb. Handelsgew.) = 10609,763 holl. Aß. = 142952,596 kölln. Richtpfennige.

Kram- oder leichtes Gewicht (= dem Nürnb. Silbergewichte) = 9926,66 holl. Aß. = 133748,682 kölln. Richtpf., und 106,881 dieser Pfd. gleichen sich mit 100 ℔ Schwergewicht, oder 106 ℔ 28 Lothe machen einen Nürnb. Zentner.

In Fuld ist durchaus das Nürnb. Handelsgewicht üblich.

Auch in Bamberg wurden sonst Fleisch, Brod, Fische und Kramwaaren nach leichtem Gewichte verkauft, wo 109 Pfund auf 1 Nürnb. Zentner giengen. Häute aber, Unschlitt, Flachs, Heu u. d. gl. wurden daselbst nach Nürnberger Gewichte abgewogen.

In München war sonst 1 Pfund Handelsgewicht = 11682 holl. Aßen = 157398,55 kölln. Richtpfen., und 137 Pfd. H. G. = 157 ehemal. franz. Pfd. 1 kölln. Mark in München endlich genau = 4870 holl. Aßen.

Allein das nun gesetzlich eingeführte baier. Pfund (= 560 neufranz. Grammes) ist = 156935,520 kölln. Richtpf. (indem 1 Gramme = 280,242 dieser Richtpf. ist) = 11647, 602 holl. Aß.

1 ℔ des Regensburger Kramgewichtes ist = 158880 kölln. Richtpf. = 11791,92 holl. Aß. Das Silbergewicht ist das holl. Troygewicht. Hr. Prof. Heinrich bemerkt, daß Regensburg ehemals auch sein eigenes Medizinalgewicht gehabt habe, wovon das Pfd. = 12 Unzen = 99760, die Unze also = 8313,3 kölln. Richtpf. gewesen sey.

In Frankfurt hat man 1) leichtes und schweres Kaufmanns- und Krämergewicht, je nachdem man auf 1 Zentner 108, oder 100 ℔ Silbergewicht rechnet; 1 ℔ Silbergewicht ist aber = 4,678803 Hectogrammes = 0,955822 par. ℔ Markgewicht; daher 1 Zentner von 100 schweren od. 100 leichten ℔ = 50,5311 Kilogrammes. 1 ℔ Schwergewicht ist daher = 0,505311 Kilogram. — 2) Hat man das Stadtwagegewicht, nämlich das Spezerey- und Speckgewicht: der Zentner des ersten Gewichtes ist = $109\frac{5}{16}$, der des letzteren = $117\frac{9}{16}$ ℔ Silbergewicht. Nach einem, oder dem anderen dieser Gewichte ist das Gewicht für Mehl, Salz, Heu, Fleisch 2c. gesetzlich bestimmt.

Eine Wiener Mark Münz- und Silberwaaren-Gewichtes ist genau = $1\frac{1}{5}$ Mark kölln. und äußerst genau = 5841 oder = 5841,2 Aßen des holl. Tr. gew. Sie wird durch Halbirungen in 65536 Richtpfennige getheilt, und heißt dann auch Valvationsgewicht. Ein Pfd. Handelsgewicht (= 32 Loth = 128 Quint) deren 100 = 1 Zentner, ist um weniges geringer als 2 Mark des Münzgewichtes, und hält 130774 Richtpfen. des Valvationsgew. und 11655,43 holl. Aßen. Auch setzt man die Wiener Mark = 28064,94 Centigram. oder = 5283,73 altpar. Grains.

2. Silber- und Goldgewicht.

Das köllnische Mark- und Silbergewicht, welches in allen teutschen Münzstädten üblich ist, bleibt sich beym Silber gleich bis zum Pfenniggewicht, welches dann noch in 15 Gran getheilt wird, so, daß 1 Pfd. = 2 Mark = 7680 Gran ist.

Beym Münzwesen theilt man das Loth noch in 18 Gran ein; also 1 Pfd. = 576 Gran.

Das Augsburger Silbergewicht giebt Hr. Chelius nach Vega so an: 1 Mark = 23590,28 Centigrammes, u. 119 Augsb. Mark = 120 frankf. Mark, oder 595 = 600, oder 596 = 601. Uebrigens ist die Augsb. Mark = 16 Loth = 64 Quint = 256 Pfennige.

Beym Golde ist das kölln. Gewicht einerley bis zur Unze; nämlich 1 Unze = 3 Karat = 36 Gran; also 1 Mark = 24 Kar. und 1 Pfd. = 48 Karat; der Karat = $2730\frac{2}{3}$ Richtpf. Dukatenäßchen gehen 17 auf ein Pfenniggewicht und 4352 auf eine Mark.

Zum Wiegen des Goldes hat man in Teutschland das Kronen- und Dukatengewicht; letzteres größtentheils in der Münze, ersteres in den Werkstätten der Goldarbeiter. Man theilt beyde in Aßen (Eschen) ein, welche nichts anders als Grane des franz. Troygewichtes (poids de Marc) sind, indem sie französischen Ursprunges sind.

Es sollten nämlich $72\frac{1}{2}$ Sonnenkronen (coronatum solatum, scutum aureum, ecu d'or) gesetzlich eine französ. Mark, also 1 Sonnenkrone 63,56 oder 63 Grane schwer seyn. Es wurde daher in Teutschland, wo sich der Münzfuß nach dem kölln. Markgewicht richtet, festgesetzt, daß $69\frac{1}{2}$ Kronen ein kölln. Mark, oder eine Krone 943 kölln. Richtpf. wiegen solle, indem $63\frac{1}{2}$ Gran des franz. Troygewichtes 943 kölln. Richtpf. machen.

Kronengold wird auch sonst das 18karätige Gold genannt, welches gewöhnlich verarbeitet wird.

Des Dukatengewichtes bedient man sich zum Abwägen des Goldes vom besseren Gehalte oder Korne überhaupt. Die Reichsgesetze hatten ehemals bestimmt, daß 67 Dukaten = einer kölln. Mark seyen, also 1 Dukaten $978\frac{15}{100}$ kölln. Richtpf., oder $65\frac{7}{10}$ par. Gran (Eschen) halten sollte; wobey das Remedium die Weglassung des Bruches gestattete. Hieraus erklärt sich, warum man bey nicht vollwichtigen Dukaten für jedes fehlende Eschen ungefähr 5 Kreutzer, oder $\frac{1}{83}$ des ganzen Werthes als Ersatz fodern könne. Hr. Prof. Heinrich bemerkt hiebey zur Ehre der teutschen Nation, daß unsere vollwichtigen Dukaten noch immer 970 köllnische Richtpf. wiegen.

Das hieher gehörige Troygewicht für Holland, Frankreich und England ist oben erklärt. Hier ist noch zu merken, daß die kölln. Unze 19 Engel, und 1 kölln. Pfenniggewicht 19 holl. Aßen wiegt.

Ein Dukaten des Dukaten- und Goldwaarengewichts in Wien ist $= \frac{1}{80,4}$ der Wiener Mark, und ist in 60 Dukaten Gran getheilt.

3. Juwelengewicht.

Das Juwelengewicht (auch bisweilen Diamantengewicht genannt, ist entweder das englische oder holländische; beyde differiren sehr wenig voneinander, indem das englische Juwelengewicht zu 64 Karat nur um 4—5 Karat leichter ist, als das holländische.

Das holländ. Juwelengewicht, dessen man sich in Teutschland größtentheils zu bedienen pflegt, eingetheilt in 64 Karat, soll 3692 kölln. Richtpf., 1 Karat also $57\frac{69}{100}$ dieser Richtpf. halten. 1 Unze des holl. Troygew. ist = 150 Karat Juwelengew. = 4 150 = 600 Gran. Im Preußischen ist seit 17.6 das englische Juwelengewicht = 64 Karat = 3688 Berl. Richtpf. = 20,5578 Centigrammes eingeführt.

4. Apothekergewicht.

Das in Teutschland, mit wenigen Ausnahmen, allgemein rezipirte Medizinalgewicht ist das Nürnberger, welches folgende Eintheilung hat, wobey wir bemerken, daß man sich der Lothe in den Apotheken nicht bediene:

Pfund	Unze	Loth	Drach. od. Quintel	Skrupel	Gran
1 Pfund	12	24	96	288	5760
	1 Unze	2	8	24	480
		1 Loth	4	12	240
			1 Drachm. od. Quintl	3	60
				1 Skrupel	20
					Gran

Die Vermuthungen, woher uns dieses Gewicht gekommen seyn möge, ob aus Venedig, über welche Stadt ehemals alle ostindischen Waaren und Arzneymittel nach Teutschland wanderten, oder aus Nürnberg darum, weil sachverständige Aerzte Gleichförmigkeit im Medizinalgewichte wünschten, Nürnberg aber ehemals gerade der Ort war, wo man Metallarbeiten von einiger Wichtigkeit fertigen ließ? — Diese Vermuthungen, sage ich, in Wahrheit oder Gewißheit zu verwandeln, ist bey weitem nicht so wichtig, als die Frage zu entscheiden: wie schwer ist das Pfd. Nürnb. Medizinalgewicht in kölln. Richtpfennigen od. holländischen Aßen?

Der verschiedenen Angaben in dieser Rücksicht haben wir schon oben im Artikel „neues Maß- und Gewichtssystem im Königreiche Baiern" erwähnt. Ueberhaupt scheinen mir die neueren Angaben der Schwere des Nürnb. Medizinalgewichtes mehr in dem Zuwenig, als in dem Zuviel von den älteren Angaben zu differiren. So

setzt Eytelwein jenes Gewicht = 7438 holl. Aß. Das von Hrn. Prof. Heinrich von Nürnberg verschriebene Pfd. Medizinalgewicht wog 100312 kölln. Richtpfennige, oder 7445 holl. Aß.

Mayer setzt dieses ℔ = 6732 altpar. Grains. Demnach wäre dasselbe = 7442,015 holl. Aß.

Allein Eisenschmid, dessen Angaben immer viel Zutrauen verdienen, setzt dasselbe Pfund = 7450 holl. Aß.

Chelius nimmt an, daß das Nürnb. Apothekergewicht kein anderes, als das Nürnb. Silbergewicht sey, und daß 1 Unze Medizinalgewicht genau mit 2 Lothen dieses Silbergewichtes übereinkomme. Nach dieser Angabe würde, das ℔ Silbergewicht, wir wir oben thaten, = 9926,66 holl. Aß. gesetzt, 1 ℔ Medizinalgewicht = 7444,995 holl. Aß. seyn. Da nun jene Angabe einerseits versichert ist, das Resultat daraus andererseits mit dem angeführten, von Hrn. Prof. Heinrich bestimmten, Gewichte eines Pfundes Nürnberg. Apothekergewichtes sehr nahe übereinstimmt: so glaube ich der Wahrheit sehr nahe zu kommen, wenn ich 1 ℔ Medizinalgewicht = 7444,995 holl. Aß. = 100311,1289, oder = 100311,13 kölln. Richtpf. setze.

In Frankreich theilte man sonst die Unze in 8 Gros, oder Drachmen, die Drachme in 3 Skrupel, den Skrupel aber in 24 Gran. Aber das ehemalige franz. Apothekerpfund à 12 Unzen wird von Vega zu 7641 holl. Aß. angegeben, es war demnach schwerer als das teutsche, welches nur 11 Unzen, 5 Drachmen, 1 Skrupel und 14,7 Grän im französ. Gewichte macht.

Wenn man ferner mit Vega das englische ℔ Medizinalgewicht zu 12 Unzen = 7766 holl. Aß. annimmt: so ergiebt sich, daß das Nürnb. oder teutsche Apothekerpfund um 4 Drachmen und 8,3 Gran leichter sey, als jenes; aber um 18,4 Gran schwerer, als das schwedische Apothekerpfund, wenn man dieses = 7416 holl. Aß. setzt.

1 Wiener Apothekerpfund enthält genau 24 Loth des Wiener Handelsgewichtes. Da nun 1 ℔ W. Handelsgew. = 32 Loth = 11655,427 holl. Aß.: so ist das Wiener Apothekerpfund = 12 Unzen = 8741,57 holl. Aß. = 42000,9 Centigram. Es ist daher das teutsche Medizinalgewicht um 2 Unzen, 2 Skr. und 3,1 Gran leichter, als das Wiener, welches übrigens, wie das teutsche, eingetheilt wird.

Endlich ist das teutsche Apothekergewicht um 1 Skrupel und 13,07 Gran leichter, als das gesetzlich königl. baier. Medizinalgewicht (= 7487,7409 holl. Aß.).

Das teutsche Apothekergewicht hat mit seinen Unterabtheilungen folgende Bestimmungen in kölln. Richtpfennigen und holl. Aß.

		kölln. Richtpf.		holl. Aß.
1 Pfund . .	=	100311,1289	=	7444,995
½ ℔ . . .	=	50155,5644	=	3722,492
1 Unze . .	=	8359,2607	=	620,415
1 Drachme . .	=	1044,9076	=	77,557
1 Skrupel . .	=	348,3025	=	25,852
1 Gran . .	=	17,41512	=	1,2926

Die Drachme Medizinalgewicht wiegt also beynahe 21 Richtpfen. mehr, als das Quentchen kölln. Markgew.

Folgende Tabelle über die Pfunde enthält die Verhältnißzahlen der Aßen holl. Troygewichts in Ansehung der für uns merkwürdigsten Orte. H. G. bezeichnet Handelsgewicht, und M. G. Medizinalgewicht.

	Aßen Holl. Troyg.		Aßen Holl. Troyg.
Berlin H. G.	9751,5	Augsburg H. G. *)	9836
— M. G.	7441,9	Braunschweig H. G.	9726
Amsterdam H. G.	10280	Bremen H. G.	103[illegible]0
— Tr. G.	10240	Dänem. — —	10392,4
— M. G.	7680	Danzig — —	9062

*) 100 ℔ Schwer- oder Frohngewicht = 103 ℔ 29 Loth Leicht- oder Kramgewicht.

	Aßen Holl. Troyg.
England	
Avoir du Poids (zu 16 Unzen)	9441
Troyg. (zu 12 Unzen)	7766
Frankreich (ehem.)	
— Mrk G.	10188
— M. G.	7641
— Mrk. Münz G. (zu 8 Unzen)	5094
Hamburg H. G.	10080
Hannover — —	10190
Der Ztr. hat 112 ℔.	
Kölln H. G.	9735
Leipzig — —	9716
Nürnberg H. G.	10609,763

	Aßen Holl. Troyg.
Nürnberg M. G.	7444,995
Petersburg H. G.	8512
Prag H. G.	10646
Riga — —	8712
Schweden H. G.	8848
— M. G.	7416
Venedig H. G.	
— Libra grossa	9938,13
— Lib. sott.	6286,13
Wien H. G	11655,8
— M. G.	8741,6
— Münz G.	11682,4

In Betreff des Gewichtes für München, Bamberg, Würzburg ist oben schon das Nöthige beygebracht.

Wollte man die kölln. Mark, das teutsche Apotheker-, das französische und holländische Troygewicht, und eben dadurch jedes an andern Orten übliche Gewicht, auf Theile des Gramme reduziren: so diente hiezu die folgende Tabelle:

			Milligram.
1 Aß	Holländisches Troygewicht	=	48,0421
1 Engel	— —	=	1537,3466
1 Unze	— —	=	30746,9325
1 Mark	— —	=	245975,4598
1 Grain franz.	— —	=	53,11478
1 Denier	— —	=	1274,7548
1 Gros	— —	=	3824,2644
1 Once	— —	=	30594,1151
1 Mark	— —	=	244752,9208
1 Gran	teutsches Mediz. gew. —	=	62,1431
1 Scrupel	— —	=	1242,8629
1 Drachme	— —	=	3728,5889
1 Unze	— —	=	29828,7109
1 Pfund	— —	=	357944,5307
1 Richtpfennig	köllnisch —	=	3,5684
1 Hlr.	— —	=	456,7615
1 Pfennig	— —	=	913,5229
1 Quentchen	— —	=	3654,0918
1 Loth	— —	=	14616,3671
1 Unze	— —	=	29232,7342
1 Mark	— —	=	233861,9117
1 Pfund	— —	=	467723,8234

IV. Zeitmaß.

Wir haben hievon schon oben in den §§. 150. 151. gehandelt. Wir wollen hier das Gesagte nur kurz zusammenstellen, und noch einige Nebenerörterungen beyfügen.

Die Zeit, innerhalb welcher sich die Erde in ihrer Bahn um die Sonne bewegt, nennt man Jahr. Die Zeit aber, innerhalb welcher sich die Erde um ihre eigene Axe bewegt, heißt Tag. Für den gemeinen Gebrauch rechnet man das Jahr zu 365 Tagen, oder 12 Monaten, oder 52 Wochen; den Monat wieder zu 4 Wochen und die Woche zu 7 Tagen. Aber genau genommen ist das Jahr = 365 T. 5 St. 48 Min. 45 Sek. Daher kommen die Schaltjahre; d. i. solche Jahre, wo ein Tag eingeschaltet wird, die folglich 366 Tage haben. Die weitere Eintheilung des Jahres ist die in vier Jahrszeiten, jede zu 3 Monaten; und zwar setzt man gewöhnlich den Anfang des Frühlinges auf den 21ten März; den Anfang des Sommers auf den 21ten Junius; den Anfang des Herbstes auf den 23ten September, und den Anfang des Winters auf den 21ten December.

Man muß den Sonnenmonat, der theils 30, theils 31 Tage hat, von dem Mondsmonate unterscheiden; dieser hat $29\frac{1}{2}$ Tage oder genau 29 T. 12 St. 44 Min. 3 S. (die Dauer der Wiederkehr des Mondes zur Sonne). Ein Mondjahr ist daher 354 Tage 8 Stunden 48 Min. 36 Sek. lang.

V. Dinge, die blos gezählt werden.

Der gewöhnliche Ausdruck für 12 ist Dutzend, und für 60 Schock. Sonst nennt man auch 10 einen Decher, 15 eine Mandel; 20 eine Steige; 72 eine Webe. Hieher gehören besonders noch folgende Eintheilungen:

a. Rückſichtlich des Schreibpapiers

Ballen	Rieß	Buch	Bogen
1 Ballen	10	200	4800
	1 Rieß	20	480
		1 Buch	24

Allein ein Buch Druckpapier hält 25, ein Rieß 500, ein Ballen 5000 Bogen.

b. Rückſichtlich des Garnes: 1 Stück Garn = 4 Strähn; 1 St. = 3 Zaſpel; 1 Z. = 20 Gebünd; 1 G. = 20 Faden; 1 F. = 4 Ellen.

VI. Münzen und deren Vergleichung.

Es giebt reelle, gangbare (ausgeprägte oder wirklich kurſirende) und fingirte, oder Rechnungs-Münzen. Dieſe ſind ein idealer Maßſtab des Werthes aller Dinge, ſelbſt der geprägten Münzen; dergleichen ſind in England das Pfund Sterling und (ehem.) in Frankreich der Livre. In Teutſchland iſt es der Gulden und Reichsthaler, ob es gleich, wie bekannt iſt, auch ausgeprägte Thaler giebt. In Franken gehören zu den Idealmünzen, von denen man zum Theile in Rechnungen (noch vor 10—11 Jahren) häufigen Gebrauch machte, zum Theile noch ſprechen hört, folgende:

Guter Kreutzer 1¼ kr. rhn.
Schreckenberger 4 Schill. 4 pf.
Ortsgulden 7 Schill.
Fränkiſcher Gulden 28 Schill. = 15 Batz. fr. = 1 fl. 15 kr. rhn.
Thaler 1 fl. 3 Batz. fr. = 1 fl. 30 kr. rhn.
Groſchen 8 Pfennige.
Pfund 5 Schill. = 30 pf.
Kopfſtück 4 Batzen = 20 kr. rhn.
Guldensthaler 16 Batzen fr. = 1 fl. 1 Batzen = 1 fl. 25 kr. rhn.

Gegenwärtig müssen bey uns alle Rechnungen nach rheinländischen Gulden und Kreuzern gestellt werden; ob man gleich im Privatleben noch nach fränk. fl. rechnen hört.

Das Gewicht der geprägten Münzen wird nach dem köllnischen Markgewicht bestimmt. Die Mark d. i. 16 Loth fein Silber und 24 Karat rein Gold heißt die feine Mark. Rauhe Mark heißt die Mark solchen Silbers oder Goldes, mit welchem schlechteres Metall zusammengeschmolzen (legirt) ist. So enthält 12löthiges Silber 4 Loth und 19karatiges Gold 5 Karat schlechteres Metall in der rauhen Mark. Das absolute Gewicht einer Münzsorte heißt ihr Schrot; und ihr Gehalt in Gold oder Silber heißt ihr Korn. Beydes wie der Kaufwerth einer Münze wird durch den Münzfuß bestimmt; oder dieser ist die gesetzliche Regel, wieviel von den Münzen, die zum Maßstabe angenommen sind, auf die Mark fein oder auf die Mark rein gerechnet werden.

Der Münzfuß war verschiedenen Veränderungen unterworfen. Einige der merkwürdigsten mögen hier stehen:

a) im Silber;

1) Im J. 1296 ließ König Wenzel in Böhmen zuerst Silbergroschen statt der sonst üblichen Brakteaten schlagen, welche 14 Loth fein waren und deren 60 auf 1 Mark fein giengen. Ein jeder wog ¼ Loth, so, daß einer, der damals eine Abgabe von 1 Groschen zu bezahlen hatte, heut zu Tage 5 Gr. 4 Pf. in Conventionsgeld zu bezahlen hätte.

2) Nach dem alten Reichsfuß vom J. 1566 (auf dem Reichstage zu Augsburg bestimmt) giengen 8 Reichsthaler auf die rauhe und 9 auf die feine Mark Silbers. Ein solcher Thaler hieß von seinem Gewichte Uncialis, wie jetzt ein Speziesthaler.

3) Im J. 1559 giengen 10 Gulden 13½ kr. auf die Mark fein.

4) Im J. 1596 prägte man 12 fl. 30 kr. aus der Mark fein, und im Jahre 1623 13 fl. 30 kr.

5) Im J. 1667 wurde zu Zinna im Magdeburgischen von Sachsen und Brandenburg der Zinnische Fuß mit 10½ thlr. oder 15¾ fl. auf die feine Mark Silbers eingeführt.

6) Im J. 1690 kam der Leipziger Fuß auf, von Sachsen, Brandenburg und Braunschweig angenommen. Nach ihm hielt die feine Mark Silbers 12 thlr. oder 18 fl. Er wurde 1738 zum allgemeinen Reichsfuß erhoben, ist aber nur noch von Churbraunschweig, im Hannövrischen und Schwedisch-Pommern beybehalten.

7) Nach dem Graumannischen oder 21 fl. Fuß kommen auf die feine Mark S. 14 Rthlr., oder 21 Gulden. Er wurde 1750 in den Preussischen Staaten angenommen und 1764 erneuert.

8) Nach den Conventions- oder 20 Guldenfuß giengen auf die Mark fein 13⅓ thlr. (20 fl.). Er wurde 1753 von Oesterreich und Baiern und dann auch von Sachsen und Braunschweig angenommen. Nach ihm gilt die Mark fein Gold, den Dukaten à 2 Thlr. 20 Gr. 8 Pf., 188 Thlr. 17 Gr. 6 Pf. oder 283 fl. 6 kr. $\frac{34}{71}$ Pf.

9) Nach dem jetzigen Reichs- oder 24 fl. Fuß gehen auf die Mark fein S. 16 Rthlr. (24 fl.), oder 10 Conventionsthaler. Dieser ist im Fränkischen und mehreren Reichslanden angenommen.

b) im Golde.

1) Der rheinische Goldguldenfuß, 72 Stück auf die rauhe Mark von 18 Karat, 6 Grän Goldes und 3 Karat Silber: nach diesem Fuße sind die baier. Karolinen und Maxd'ors geprägt;

2) der Dukatenfuß, 67 Stück auf die feine Mark von 23 Karat, 8 Grän Gold und 2 Grän Silber.

Das Gepräge der Münze enthält Schrift, Namen, Bildniß und Wappen des Münzherrn, wodurch derselbe die Beschaffenheit der Münze versichert. Die Bildseite heißt die Hauptseite (Avers); die Schrift- oder Wappenseite aber die Rückseite (Revers).

Die Prüfung der Münzen, welche durch richtig legirte Probir- und Streichnadeln geschieht, heißt Valvation.

Wenn eine Münzsorte in die andere umgesetzt werden soll, das heißt, soviel von der einen dem wahren innern Werth nach zurückegegeben werden soll, als man von der andern giebt: so muß na ürlich der, welcher das bessere Geld hingiebt, eine größere Zahl Thaler rc. in der schlechteren Sorte dafür zurücke bekommen. Die Zahl Thaler, welche er mehr bekömmt, heißt das Aufgeld, Agio; der, welcher das schlechtere Geld ausgiebt, erhält eine geringere Zahl in Thalern rc. des Bessern; die Anzahl dieser Thaler, welche ihm abgezogen werden, heißt der Rabatt oder Disconto. Rechnet man hiebey nach dem, was jeder für 100 Thlr. die er gegen eine andere Sorte verwechselt, bekömmt: so entstehen für den, der Agio erhält, Procente aufs 100; für den, der den Rabat leidet, Procente im 100. Giebt man überhaupt die Procente an, so pflegt man sie immer aufs 100 zu bestimmen. Z. B. Friedr. d'or stehen zu 135 heißt für 100 thlr. Hamb. Banco muß man 135 thlr. in Friedr. d'or d. i. ein Agio von 35 Procent bezahlen.

I. Rechnungsmünzen.

Diese sind nach Aßen holl. Troygewicht in feinem Silber und nach ihrem rheinl. Geldwerthe gewürdigt. Rl. bezeichnet Rthlr. und Pf. Pfennige, deren 4 einen Kreutzer machen.

		Aßen	fl.	kr.	pf.
Amsterdam	1 Rl. Cour. à 50 St. Cur.	498 .	2	28	—
Berlin	1 Rl. Cour. à 24 Gr *) à 12 Pf. , ,	347,43 .	1	42	3
Braunschweig	1 Rl. à 24 Gr. oder 36 Mrg. oder 90 kr. nach dem 20 fl. F. , ,	364,80 .	1	48	1
Dänemark	1 Rl. à 6 Mk. oder 96 ßl. oder 1 Rl. 4 Gr. 2 Pf. Conv. , ,	428,12 .	2	7	2

*) Der Preuss. Groschen enthält genau 1 Aß holl. Troygew. im Golde; 1 thlr. 2400 solcher Aßen.

		Aßen	fl.	kr.	pf.
Danzig	1 Rl. à 90 gr. Poln.	310	1	32	—
England	1 Pfd. Sterling = 20 Schill. = 24 Pence	2306,83	11	25	3
Frankreich (ehem.)	1 Liv. = 20 Sols Tournois = 240 Deniers	92,87	—	27	2
(jetzig.)	1 Franc = 1 Liv. 3 Den.	—		27	3
Genf	1 Ecu à 3 Liv.	468	2	19	—
Hamburg	1 Rl. à 3 Mark Cour.	492,18	2	7	2
	— à 3 Mk. Banco	528,2	2	37	—
Hannover	1 Rl. à 36 Mgr. Kassengeld	405,33	2	—	2
Leipzig	1 Rl. à 24 gr. Cour.	364,4	1	48	—
Milano	1 Scudo imp.	609,2	3	1	—
	— corrent	423	2	5	2
Portugall	1 Crusado von 400 Rees	230,8	1	8	2
Reval	1 Rubel von 100 Kopeken	437,4	2	10	—
Riga	1 Rl. Alberts	506,9	2	31	—
Rom	1 Sc. di Stampad. à 1523	769	3	48	3
	— — — à 1525	770	3	49	—
	1 Scudo moneta à 10 Paoli	505	2	30	—
Rußland	1 Rubel	437,4	2	10	—
Schweden	1 Rl. Silbermünze	160,3	-	47	3
	— Kupferm.	53,4	-	15	3
Sicilien	1 Unze	1241	6	9	—
	1 Scudo	496,4	2	27	2
Spanien	1 Real de Plata	48,12	-	14	1
	— de Vellon	25,5	-	6	1
Turin	1 Lira à 20 sol. Piem.	110,5	-	33	—
Venedig	1 Ducato di banco	469,5	2	19	—
	— picc. Corrent	303,25	1	30	—
	1 Lira	48,9	-	14	3
Wien	1 Gulden à 60 kr. Cour.	243,2	1	12	2

II. Wirklich geprägte Münzen.

1. Goldmünzen

a. Teutschlands.

Diese sind in der zweyten Columne nach ihrem Schrot oder äußerlichen Gewicht der Stücke, wieviel nämlich auf die rauhe kölln. Mark Gold; in der zweyten, wieviel Stücke

derselben Art auf die feine kölln. Mark gehen, oder nach ihrem Korn, und in der dritten in rheinischer Währung angegeben.

Auf das bekannte wechselnde Sinken und Fallen des äußerlichen Werthes der Münzen konnte natürlich hier keine Rücksicht genommen werden.

	Auf die rauhe C. M. gehen St.	Auf die feine C. M. gehen Stück	Werth eines jeden Stückes in rhn.		
			fl.	kr.	pf.
Augustd'or Sächs.					
a) ältere doppelte	$17\frac{21}{37}$	$19\frac{17}{37}$	18	14	1
einfache	$35\frac{5}{37}$	$38\frac{34}{37}$	9	7	$\frac{1}{2}$
Nach dem Paßiergew.	—	—	9	3	$1\frac{1}{2}$
b) neuere einfache	35	$38\frac{10}{13}$	9	9	1
Carlsd'or Braunschw.					
a) doppelte	$17\frac{1}{2}$	$19\frac{9}{20}$	18	22	$2\frac{9}{10}$
b) einfache	35	$38\frac{18}{20}$	9	11	$1\frac{9}{20}$
Nach dem Paßiergew.	—	—	9	—	$3\frac{3}{4}$
Carolinen kölln. baier. würtenb. u. s. w. mit Ausschluß der Badend. Montfr. Hohenz.					
ganze zu 3 Goldg.	24	$31\frac{5}{37}$	11	24	—
Dukaten a) Reichs-Gesetzmäßige	67	$67\frac{67}{71}$	5	4	2
b) nach holl. Fuß	67	$65\frac{52}{283}$	5	3	$1\frac{1}{2}$
c) Al Marco in Hamb.	$67\frac{1}{11}$	$68\frac{20}{47}$	5	1	$3\frac{1}{2}$
Friedrichs- und Friedrich Wilhelmsd'or					
a) doppelte	$17\frac{1}{2}$	$19\frac{9}{20}$	18	22	$2\frac{9}{10}$
b) einfache	35	$38\frac{18}{20}$	9	11	$1\frac{9}{20}$
Nach dem Paßiergew.	—	—	9	3	3
Goldguld. einfache					
a) Hannövrische	72	$92\frac{4}{15}$	3	51	—
b) Rheinische	72	$93\frac{15}{37}$	3	47	$2\frac{1}{2}$
Maxd'or baierische					
a) doppelte à 4 Goldg.	18	$23\frac{13}{37}$	15	10	2
b) einfache zu 2 —	36	$46\frac{26}{37}$	7	35	1
c) halbe zu 1 —	72	$93\frac{15}{37}$	3	47	$2\frac{1}{2}$

Durch eine fürstl. Verordnung vom 6. Nov. 1765 wurde für Bamberg und Würzburg festgesetzt: so lange der Reichsdukaten auf seinen äußerlichen Werth zu 5 fl. rhn. und der Thaler zu 2 fl. 24 kr. verbleibt; sollen folgende Geldsorten im Publikum um beygesetzten Preis kursiren:

	fl.	kr.
Alle Charlesd'or (die fürstl. Baad. Durlach., Hohenz., Waldek., und gräfl. Montf. ausgenommen).	11	—
Halbe Ch. d'or	5	30
Viertels Ch. d'or	2	45
Die französische Schildlouisd'or im Preise à noch zu belassen.	11	—
Maxd'or	7	20
halbe Maxd'or	3	40
Alle kaiserl. königl. Churf. und fürstl. gräfl. und reichsstädt. Dukaten à 23 Karat 8 Grän. fein Gold und vollwichtig . .	5	—
Cremnitzer Duk.	5	2
Kaiserl. Russ. Duk.	4	55
Alle französische, span., preuß., und Braunschweig. Lüneburg. 5 Thalerstücke, die sogenannten neuen preußisch. Friedr. d'or und königl. polnische Augustd'or ausgenommen	8	45
ganze Souverainsd'or . . .	14	44
halbe — — . . .	7	22

b. Einige Goldmünzen außerhalb Teutschland.

	Korn im Aßen holl Troygew	Werth eines Stückes in rhn. fl.	kr.	pf.
Amsterdam Ruyder à 14 fl.	196,11	11	6	—
½ R. à 7 fl. holländ. Cour.	—	5	33	—
Dukate	71,30?	5	6	3
Dänemark Species Dukate	75,48	5	8	0,5
neue Cour. Duk.	58,61	4	15	—
England 5fache Guinee	—	60	—	0,8
einfache —	—	24	—	0,2
ganze —	159,97	12	—	0,1
(auch halbe und Viertel Gu.)				
Frankreich doppelte L.d'or	—	12	—	—
einfache —	148,03?	11	—	—
(in Teutschland unter dem Namen Schild Louisd'or bekannt)				
jetziges Octogr. d'or à 25 Fr.	—	11	36	0,4
Mailand. Doppie oder Doble 130 Grani schwer	—	15	1	1
Neapel. Doppie à 46 Carl.	158,02?	9	35	—
Sizil. Onze à 30 Carl.	—	6	15	—
Portugal. Dobras à 12800 Rees nach 1722 gepr.	(1 Onc. Gew)	36	48	—
Rom. Doppie à 30 Paol.	135,71	8	15	—
Scudi d'oro	—	4	7	2
Zechini	—	5	7	2
Rußland. Imperialen à 16 R.	251,00	21	40	—
(auch halbe à 5 Rubel)				
doppelte Duk. à 4½ Rubel	—	9	45	—
Schweden. Einfache Duk. à 96 Schill.	87,52	5	24	—
Spanien. Doblon à 4 Escud.	129,[illegible]0?	18	24	—

2. Silbermünzen.

		Korn nach Aß. holl. Tr.	fl.	kr.	pf.
Albertskh.	Holl à 20 Stüb.	507	2	30	2
Carolino	Neapel	41	–	12	—
Carlin	Schweden	150	–	44	3
Conv. thlr.		486,4	2	24	2,2
Crusado	nuovo à 480 Rees	273,60	1	2	2
Ducado	del Regno Neap.	413	2	17	2
— —	veneto effettivo	391	1	56	1
Dukado	Holl.	645,8	3	9	3
Giustina	de Venezia	535	2	39	—
Gulden	Holl.	198	–	58	3
— —	neuer Conv. geld seit 1750	243,2	1	12	1
Kopfstück	20 kr. Conv. geld	81	–	24	0,3
Krone	Dänische à 4 Mk.	311	1	32	2
— —	Engl.	573	2	50	2
— —	teutsch. Cour.	540	2	42	—
Laubthaler		556	2	45	—
Pezza	della rosa Toscana	498	2	27	—
Piaster	Span.	498	2	27	—
— —	Türkischer	182,4	–	55	3.5
Rubel	Russ. von 1759	437	2	10	—
Schilling	Engl.	114	–	33	3,5
Speziesthlr	Basler	515	2	33	—
— —	Dänisch. Cour.	518	2	34	—
— —	Sächsischer	460	2	16	3
— —	Schwedischer	534,8	2	39	—
Scudo	Römischer à 10 Paoli	505	2	30	—
— —	Sicil.	483,7	2	24	—
— —	nuovo di Savoya	663	3	17	—
— —	della croce	605	2	59	3
Thlr. Banko	Hamburg	528	2	37	—
— —	Holländ.	528	2	37	—
Thlr. Cour.	in Hamburg. Lüb Meklenb. Val.	429	2	7	2
— —	in Holl. Val.	500	2	28	2,75
— —	in Conventgeld	364	1	48	0.75
— —	in Preuß. Cour.	347	1	43	0,5
— —	nach dem Leipz. Fuß	405	2	—	0,75

Die bey uns gegenwärtig am häufigsten kursirenden Silbermünzen (unsere einheimischen Scheidemünzen nicht mitgerechnet) sind die österreichischen 12- und 24kreutzerstücke die ganzen, halben und viertels-Kronen (à 2 fl. 24; 1 fl. 21; 40½ kr.), nachdem die ehemaligen französischen Laubthaler (à 2 fl. 45 kr.) vor einigen Jahren anfänglich herabgesetzt und dann verschlagen wurden. Weniger häufig kursiren die ganzen oder halben Conventionsthaler (Baierthaler) à 2 fl. 24, oder 1 fl. 12 kr., dann die Napoleonsthaler à 2 fl. 19 kr. ¾ pf.

Zu den Würzburger alten Landmünzen gehören folgende:

Heller, eine Kupfermünze		
Pfennige Silber- oder Kupferm.		= 2 Hlr.
1 Dreyer, Silberm.		= 2 Pf.
1 Schilling	—	= 6 —
1 Batzen	—	= 11 —
½ Batzen	—	= 5½ —
Goldgulden	—	= 2 fl. 14 Batz. fr. = 3 fl. 40 kr. rhn.
Dukaten	—	= 4 fl. fr. = 5 fl. rhn.

Die ersteren Münzen gehörten zur sogenannten Scheidemünze. An ihre Stelle traten unter der vorigen großherzoglichen Regierung die Kreutzer in Silber, und halbe Kreutzer in Kupfer; dann die Groschen oder 3 Kreutzerstücke, und die Sechser oder Sechskreutzerstücke in Silber.

Noch einige Momente, zur Geschichte der fränk. Münzen und Gemäße gehörig.

Aus dem Buche „Neuer mathematischer Trismegistus, abhanlend die Rechenkunst mit der Feder und Lini — das Feldmessen — die Visirkunst ꝛc. von Wolfg. Jac. Prerendörffer Norib. Ap. et Imp. Auct. Not. Jur. Publ. Philo. Math. Arith. Herb. p. t. ord. Gedruckt zu Würzburg b. Christ. Küchlern Anno 1664" — lernen wir folgende fränkische Münzen kennen: 1 alter Pfenn. = 2 Hl.; 1 neuer Pfenn. = 3 Hl.; 1 Schilling = 9 alt. oder = 6 neu. Pfenn.; 1 fl. = 28 Schill.; 1 ℔ = 30 neu. od. alt. Pfenn.

Die verschiedenen Werthe eines Gulden giebt Prerend. so an: 1 fl. = 5 ℔ 18 Pfenn. neu. Geld oder 168 neu. Pf. = 8 ℔ 12 Pf. alt Geld oder 252 Pf. = 21 Zwölffer = 15 Batzen = 60 kr. (1 kr. = 4 Pf., wobey bemerkt wird, daß keine kr. in Frankenland gemünzt seyen, — und 1 Batz. = 4 kr.) = 6 Schreckenberger = 4 ort oder quart; — 1 Rthlr. hat 18 Batz. oder 72 kr. — alles in fränkischer Währung.

Durch ein Dekret der vorigen allerhöchsten Regierung (vom 10ten Dez. 1806 im würzb. Regierungsbl. Stück XXI. desselben J.) wurden 1) die Sechskreuzerstücke mit Ausnahme der konventionsmäßig (mit der Zahl 240) ausgeprägten auf 5 kr.; 2) alle 3 kr.stücke ohne Unterschied auf 2 kr. herabgesetzt; 3) alle noch unbeschnittenen Schillinger auf die angenommene rhn. Währung mit 2½ kr., die Dreyer mit 1 kr., die würzb. Heller mit 1 Viertelskr. eingeglichen.

Im folgenden Jahre 1807 wurden die neuen 6, 3 nnd 1 kr.stücke, dann die Kupferpfenninge = ½ kr. und Heller = ¼ kr. ausgegeben, und die oben genannten fränkischen Münzen außer Kurs gesetzt.

Die vorhin genannte Schrift war mir auch darum merkwürdig, weil der Verf. eine Vergleichungstabelle sowohl der an verschiedenen würzb. Orten üblichen Flüssigkeits- als der

Getreidgemäße mit den würzb. Gemäßen beygefügt hat. Da er offenherzig gesteht, daß er hiebey nur das gebe, was man ihm mitgetheilt habe, die Angaben folglich nicht verbürgen könne, und um allenfallsige Berichtigung bitten müsse: so finde ich hierin einen Beweis, daß vor dem J. 1663 nichts für diesen Gegenstand auf herrschaftliche Kosten geschehen und Zuverläßiges bekannt war.

Erst im J. 1666 erschien im Drucke „Größere Resolvirung über des hohen Stiffts Würzburg Aembter, als auch etlicher angränzender Oerter habend und gebrauchender Korn und Haber-Gemäß; welche auf des Hochwürdigsten Fürsten und Herrns Hr. Johann Gottfried ꝛc. gnädigstem Anbefehlen in beede würzb. Maaß reduciret, durch J. G. B.

Huberti giebt in der Einleitung seiner im J. 1777 herausgegebenen Vergleichung der fürstl. würzb. u. mehrerer fremdherrischen Fruchtmaße gegen das würzb. Stadtmaß Aus gnädigster Verordnung des Hochw. Fürsten und H. H. Adam Friderich ꝛc. — als Grund der großen Mangelhaftigkeit der vorigen Resolvirung an, „weil der damalige Commissarius mit Vorbeygehung der Matrizen oder des ächten Muttergemäßes sich lediglich an die hölzernen und auf den Speichern gangbaren Gemäße hielt". Er hätte hinzusetzen können, daß dieses Verfahren um so fehlerhafter habe seyn müssen, da der Kommissär die Größe der Fruchtgemäße blos durch geometrische Ausmessung bestimmte, wie dieß die jener Resolvirung beygefügte Tabelle deutlich beweist. Allein Huberti's Reduktionen stützen sich auf die richtige Methode, die relative Größe der Gemäße (mit Wasser, oder mit Frucht gefüllt) durch Abwiegen zu bestimmen, nachdem er sich zu dieser Absicht genaue Matricen von der würzb. Kornmetze und eine richtige Waage hatte fertigen lassen.

Es ist bemerkenswerth, daß die Hubertischen Angaben näher mit den von Prexendörffer, als mit den spä-

terer vom J. 1686 stimmen. Als Beleg will ich nur einige Vergleichungen anführen, wobey ich die von Prex. mit P., die zweyten mit B. die Huberti'schen mit H. bezeichnen will:

	Mltr.	Metz.	
100 Arnsteiner Habermalter machen in W.	59	$10\frac{3}{4}$	nach P.
	54	5	— B.
	57	5	— H.
100 Dettelbacher Kornmalter — —	120	$2\frac{1}{2}$	— P.
	115	5	— B.
	116	1	— H.
100 Neustädter — — — —	75	$6\frac{1}{4}$	— P
	72	3	— B.
	74	2	— H.
100 Ochsenfurter Habermalter — —	71	$3\frac{1}{4}$	— P.
	63	3	— B.
	67	9	— H.
100 Schweinfurter — — — —	75	—	— P.
	69	3	— B.
	73	11	— H.

Die von Joh. Bapt. Wagner (ehemaligen Hofkammerkanzellisten und Universitätsrechenmeister) herausgegebene „Vergleichung der hochfürstl. würzb. Habergemäße gegen das würzb. Stadtkornmaß (1799)" ist nur die weitere Ausführung des von Hubert selbst S. 23. der Einleitung seiner Vergleichung ausgesprochenen Vorschlages, die Vte Kolumne seiner Tab. LX. zu gebrauchen. Wagner hat durchaus nicht genau genug gerechnet. So setzte er z. B. 50 würzb. Kornmetzen = 37 Malter 4 Metz. 2 Viertrl, 1 Mäßchen oder Köpflein und 3,20 64tel arnsteiner Habergemäß. Die genaue Rechnung giebt statt der letzten Zahl diese: 3,15776. Jene zu hohe Zahl giebt 1000 Malter beynahe um 1 Mäßchen zu groß.

Bey dieser Gelegenheit richtete ich abermals meine Aufmerksamkeit auf den Huberti'schen 10000theiligen Maßstab ($1\frac{1}{2}$ par. königl. Fuß vorstellend), von dem ich oben sag-

te, daß er den pied du Roi wenigstens um $\frac{1}{10}$ Linie zu klein gebe. Ich muß hiebey zweyerley anführen:

1. Was ich oben als blos wahrscheinlich angab, daß nämlich Brander in Augsburg jenen Maßstab gefertigt habe, ist nach Huberti's Aussage ganz gewiß. Auch finde ich darin, daß H. sagt, daß er den, jenem Maßstabe zum Grunde gelegten, pied du Roi von dem berühmten Astronomen M l'Abbé de la Caille empfangen habe, einen Grund, warum H. nicht das geringste Mißtrauen in diesen Maßstab setzte.

2. Dieser fehlerhafte Huberti'sche Maßstab hat glücklicher Weise durchaus keinen Einfluß auf die von H. gegebenen Reduktionszahlen seiner Vergleichung, indem er damit lediglich den Inhalt der würzb. Korn- und Habermetze bestimmte. Ob er aber auf diese Bestimmung nicht Einfluß hatte, darüber habe ich oben meinen Zweifel schon angeführt. Es wäre dieß nicht schwer auszumitteln, wenn wir die alten Muttergemäße, welche Huberti untersuchte, und nach welchen er seine Matriçen fertigen lassen mußte, noch besäßen.

Bey dieser Gelegenheit merke ich noch an, daß in Meusels Gelehrten-Lexikon (Band II.) die Schrift: „Hrn. Huberti's Gedanken über den Nutzen und die Möglichkeit eines einförmigen Fruchtgemäßes im Reiche oder den vorderen Reichskreisen (Maynz 1774 mit Weilandischen Lettern)" unrichtig diesem Franz Huberti (Prof.) zugeschrieben werde, indem dieser selbst seinen Bruder als Verfasser jener Schrift in der mehrmals angeführten Einleitung zu seiner Vergleichung der würzb. Fruchtgemäße nennt.

Ende.





